Archimede

appunti per un viaggio a Siracusa

Giuseppe Metere
Università degli Studi di Milano

Liceo Classico Carducci - Milano

giovedì 21 marzo 2024

Archimede

Archimede da Siracusa (287–212 a.C.) chiamato *pitagorico* dagli eruditi arabi:

- uno dei più grandi **scienziati** di tutti i tempi
- il più grande **matematico** dell'antichità

ma anche

- un personaggio chiave nella storia della sua città, **Siracusa**, che egli ha contribuito a rendere uno dei centri culturali più importanti del mediterraneo

Breve biografia di Archimede

Archimede passa la maggior parte della sua vita a Siracusa. Forse è parente del tiranno Gerone II, per il quale realizza macchine civili e militari.

Trascorre qualche tempo ad Alessandra, dove conosce, tra gli altri, Conone e Eratostene.

Partecipa attivamente alla difesa della sua città. Nel 212 a.C. dopo due anni di assedio, le legioni di Marco Claudio Marcello conquistano Siracusa e Archimede viene ucciso da un soldato romano.

In pochi decenni, Roma annienta Cartagine, conquista Alessandria e si impone così su tutto il mediterraneo, decretando la fine di uno dei periodi culturalmente più ricchi della storia dell'umanità.

Contributi di Archimede

- **matematica**
- **meccanica** - le leve, orologi ad acqua (misura del tempo), la coclea
- **idrostatica** - principio di archimede, tecnica navale
- **ottica**
- **astronomia** - planetario

Opere giunte fino a noi:

- Sulla sfera e sul cilindro,
- Misura del cerchio
- Sui conoidi e gli sferoidi
- Sulle spirali
- Sull'equilibrio delle figure piane
- Arenario
- Quadratura della parabola
- Sui galleggianti
- Stomachion
- Metodo

Lavori arrivati attraverso gli arabi

- Il Libro dei lemmi
- Su l'ettagono in un cerchio
- Sui cerchi mutuamente tangenti
- descrizione dell'orologio ad acqua.

Diverse opere perdute, tra cui

- Catottrica
- Testo di aritmetica in cui aveva proposto un nuovo sistema di numerazione

Grecia ellenistica e Magna Grecia

Alessandria d'Egitto, fondata da Alessandro nel 331 a.C. - Tolomei

- il Museo: il primo istituto pubblico di ricerca
- Biblioteca, diretta al tempo di Archimede, da Eratostene. Ci lavoravano Euclide, Aristarco da Samo (eliocentrismo), Conone di Samo.
- tecnologia: Faro che si vede a 50km, rete idrica acque Nilo depurate, illuminazione notturna...

Matematica e Geometria

- Nascono lì attorno: con Zenone (489-431 a.C.) a Elea, con Pitagora (580-495 a.C.) a Crotone, con Platone (428-348 a.C.) che soggiornò a lungo a Siracusa, e con Euclide (IV-III sec. a.C.) ad Alessandria
- A Mileto (VII-VI sec. a.C.), la celeberrima scuola con Talete, Anassimandro, Anassimene; iniziano la filosofia della natura (physis)
- Democrito (V-IV sec. a.C.) anche matematico, successivamente Eudosso di Cnido (408-353 a.C.), risolve il problema degli **incommensurabili** ($\sqrt{2}$)

Matematica ellenistica

Archimede era un matematico, ma cosa erano i matematici del III sec. a.C.?

Erano considerate parte della matematica: geometria, astronomia, meccanica, ottica, idrostatica, teoria musicale etc.

$\mu\grave{\alpha}\tau\eta\mu\alpha$ = *apprendimento, scienza*

In parallelo con le teorie empiriche, basate sull'esperienza del reale [i matematici] hanno costruito delle teorie razionali, basate sulla capacità della mente umana di immaginare e costruire concetti intellegibili, di produrre idee.

[M. Andreatta]

Archimede raccoglie l'eredità dei pitagorici e il metodo assiomatico di Euclide e applica la matematica allo studio della natura, anticipando di 1.800 anni il metodo scientifico di Galileo:

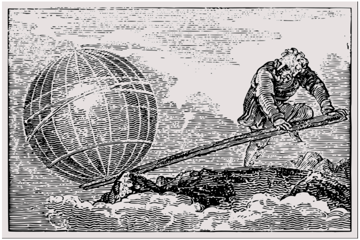
"i libri dell'istesso Archimede, già da me con infinito stupore letti e studiati"

[G. Galilei]

Tre idee grandiose!

Non possiamo parlare di tutte le scoperte e le invenzioni di Archimede...

Ci concentreremo quindi su tre grandi idee che ha sviluppato e alcune loro inaspettate conseguenze/applicazioni:



- lo studio delle leve
- il principio di Archimede
- l'assioma di Archimede

Lo studio delle leve meccaniche

Plutarco (46-117 d.C.) *Vite Parallele: Marcello*

I siracusani, quando videro i romani investire la città da due fronti, terra e mare, rimasero storditi e ammutolirono dalla paura.
Di tutto ciò non si preoccupò Archimede, come se le armi del nemico nulla contassero a paragone dei suoi meccanismi. Cominciò quindi a caricare le macchine e a far piovere sulla fanteria nemica proiettili di ogni genere.

Grandi masse di pietra cadevano dall'alto con enorme fragore e velocità; non c'era modo di difendersi dal loro urto, rovesciavano a terra tutti quelli che incontravano, scompigliando i ranghi. Contemporaneamente lunghi pali venivano proiettati fuori dalle mura, in direzione delle navi affondandole senza rimedio con diverse tecniche: colpendole dall'alto con dei pesi, oppure afferrandole per la prua con delle mani di ferro e sollevandole in verticale per poi immergerle nell'acqua con la poppa. Con cavi immersi nell'acqua e azionati dall'interno della città imbragavano le navi che venivano poi fatte girare, sballottate qua e là fino a farle sfracellare contro le rocce e gli scogli posti sotto le mura, provocando un grave massacro degli uomini a bordo che subivano così la stessa sorte delle navi.

Datemi un punto di appoggio, e solleverò la terra!

La leva non è un'invenzione di Archimede, ma egli è il primo a studiarne scientificamente e sistematicamente le proprietà.
Con leve, pulegge e carrucole, Archimede riuscì a realizzare i congegni che più impressionarono i suoi contemporanei.

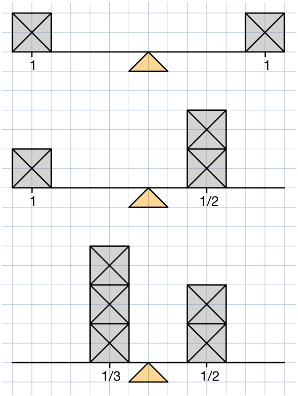
Legge della leva. *Due grandezze sono in equilibrio tra loro se le loro distanze dal fulcro sono inversamente proporzionali ai loro pesi:*

$$d_2 : d_1 = P_1 : P_2$$

La legge può essere riscritta:

$$P_1 \cdot d_1 = P_2 \cdot d_2$$

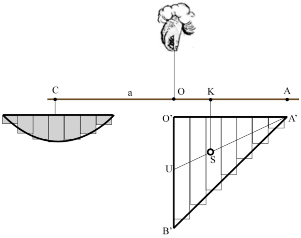
Nota. La macchina ($\mu\epsilon\chi\alpha\nu\acute{\eta}$) è un meccanismo che inganna la natura, sollevando un peso maggiore con uno più piccolo.



Il "Metodo Meccanico"

Il "Metodo Meccanico", è uno degli scritti più profondi e misteriosi di Archimede - tra quelli che ci sono pervenuti.

Si trova nel **Palinsesto di Archimede**, ritrovato solo nel 1998.
È una sorta di testamento scientifico di Archimede, ove egli racconta come, per ottenere i suoi brillanti risultati geometrici, applichi il principio della leva a segmenti e aree!!!



Purtroppo non possiamo entrare nei dettagli, ma ci limitiamo a riportare il seguente.

Esempio. Area del segmento parabolico.

$$A_{\text{segmento parab.}} = \frac{2}{3} \cdot A_{\text{rettangolo circ.}}$$

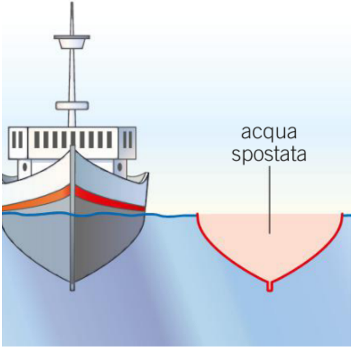
Nota. Con questo metodo meccanico, Archimede non sostituisce il ragionamento ipotetico deduttivo. Piuttosto svela al lettore il modo empirico con cui è arrivato a ipotizzare certe relazioni che ha successivamente dimostrato in modo rigoroso (v. esaustione).

Il principio di Archimede

Principio di Archimede

Come lo si insegna a scuola:

Principio di Archimede. *Un corpo immerso in acqua riceve una spinta, dal basso verso l'alto, pari alla peso dell'acqua spostata.*



Vi svelerò un segreto: per Archimede, questo non è un principio, ma un **Teorema**, che può essere dedotto da quello che lui considera il vero principio!

Postulato. *Si assuma che [...], se due porzioni di liquido sono contigue e allo stesso livello, la meno compressa sia spinta via dalla più compressa e ciascuna porzione sia compressa dal peso del liquido che è sopra di sé in verticale purché il liquido non sia rinchiuso in qualcosa e compresso da qualcos'altro.*

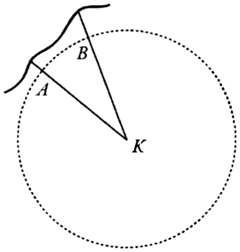
[Archimede, Sui galleggianti]

La forma degli oceani

È una caratteristica generale delle teorie scientifiche ellenistiche quella di basarsi su postulati (o principi) non verificabili direttamente, ma dai quali è possibile dedurre fenomeni osservabili. **[L. Russo]**

Teorema. *La superficie di tutto il liquido [ossia degli oceani] in condizioni di equilibrio ha la forma di una sfera con lo stesso centro della Terra.*

[Archimede, Sui galleggianti]



Dimostrazione. Se così non fosse, vi sarebbero due porzioni di acqua A e B, alla stessa distanza dal centro K, ma sovrastate da colonne di acqua di diversa altezza.

[L. Russo]

Osserviamo che in questo modo, Archimede, **anticipa un argomento chiave utilizzato per spiegare la sfericità della terra.**

L'assioma di Archimede

Il problema della misura

Molti dei lavori matematici (geometrici) di Archimede riguardano la misurazione di aree e volumi di sfere, coni, paraboloidi etc.

Περὶ Σφαῖρας καὶ κυλίνδρου	*Sulla Sfera e il Cilindro I*
λγʹ	(*Proposizione*) 33
Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.	La superficie di ogni sfera è quadrupla del suo cerchio massimo.[20]
λδʹ	(*Proposizione*) 34
Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστω κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.	Ogni sfera è quadrupla di un cono avente base uguale al cerchio massimo della sfera[21] e altezza uguale al raggio della sfera.

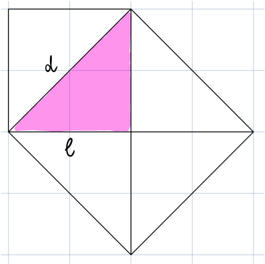
[F. G. Lastarìa]

Archimede non esprime i suoi risultati con delle formule, ma attraverso rapporti tra figure geometriche. Questo pone dei problemi...

Rapporti impossibili

Qual è il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato?

Supponendo che il segmento ℓ sia formato da un numero dispari di punti, ci chiediamo se il numero di punti del segmento d sia pari o dispari.



$$d^2 = 2\ell^2$$

Quindi d^2 è un numero pari, e di conseguenza d stesso è pari. Allora possiamo scrivere $d = 2n$, da cui:

$$d^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2\ell^2$$

Semplificando si ha $2n^2 = \ell^2$, quindi anche ℓ^2 è pari e di conseguenza ℓ è pari.

Siccome il numero ℓ non può essere contemporaneamente pari e dispari, il rapporto tra d e ℓ non può essere espresso come un rapporto tra due numeri interi, cioè con una frazione.

Gli incommensurabili

Riassumendo quanto abbiamo visto:

La diagonale e il lato di un quadrato sono incommensurabili

La situazione diventa ancora più problematica quando si considerano figure e superfici curvilinee. Ad esempio:

La circonferenza e il diametro di un cerchio sono incommensurabili

Con il linguaggio della matematica odierna sappiamo esprimere il primo rapporto con $\sqrt{2} = 1,4142...$ e il secondo con $\pi = 3,1415...$, ma i numeri irrazionali non erano ancora stati inventati!

Serviva una **teoria delle proporzioni** che potesse essere applicata in situazioni in cui i rapporti come d/ℓ non potevano essere espressi dai numeri (razionali).

L'assioma di Archimede

(o, meglio, di Eudosso-Archimede)

Date due quantità omogenee a e b, esiste un intero positivo n tale che

$$na > b$$

Un insieme numerico che soddisfi questa proprietà è chiamato **archimedeo.**

Sembra una proprietà ovvia e banale, ma non lo è!

Di fatto

- esclude l'esistenza (misurabilità) di quantità infinitamente piccole,
- permette di approssimare i rapporti incommensurabili per mezzo di numeri razionali (cioè frazioni).

L'Arenario

L'*Arenario* è forse il primo testo di divulgazione scientifica della storia. Archimede calcola il numero di granelli di sabbia necessario a riempire l'universo.

- Utilizza il modello eliocentrico di Aristarco per stimare il diametro della sfera delle stelle fisse in 10^{14} stadi, ~ 2 anni luce (1 stadion = ~ 185 m).
- Conclude che per riempire una sfera di quelle dimensioni siano necessari non più di 10^{63} granelli di sabbia.

L'Arenario può essere letto anche come una applicazione dell'assioma visto prima: non importa quanto sia piccolo il granello di sabbia **a** *rispetto all'universo* **b***, perché posso sempre trovare un numero n tale che n***a** *riempia* **b***:*

$$n\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$$

Approssimare i numeri irrazionali

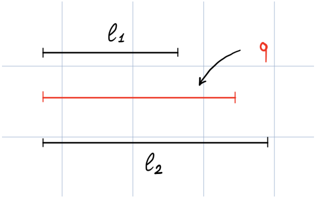
L'Assioma di Archimede ci permette di dimostrare che l'insieme delle **lunghezze razionali** è <u>denso</u> nell'insieme di **tutte le lunghezze**:

se considero due segmenti qualsiasi

$$\ell_1 < \ell_2$$

esisterà sicuramente un segmento q la cui lunghezza è un numero razionale tale che

$$\ell_1 < q < \ell_2$$



Utilizzando questa proprietà, possiamo fare vedere che ogni lunghezza ℓ può essere approssimata da un numero razionale q, in modo che l'errore $|q - \ell|$ possa essere reso piccolo a piacere: è il principio su cui si la rappresentazione decimale delle grandezze.

Ad esempio, quando scriviamo $\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$ intendiamo:

$$1 < \sqrt{2} < 2, \qquad \frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10}, \qquad \frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100}, \qquad \text{etc.}$$

Cerchi e Sfere

Al tempo di Archimede, già si sapeva molto sulle proprietà dei cerchi, ma il rapporto

$$\frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} = \frac{\text{cerchio}}{(\text{raggio})^2}$$

non poteva essere descritto, anche se il raggio era un numero intero. Oggi chiamiamo questo numero π, Archimede, forte del suo assioma, fornisce un'approssimazione molto accurata per l'epoca, perfezionando un metodo, **esaustione e compressione**, dovuto a Eudosso (e Euclide), che anticipa il calcolo infinitesimale di Newton e Leibniz. Dalla "Misura del cerchio":

Proposizione. *La circonferenza di ogni cerchio è maggiore del triplo del diametro, e lo supera di meno di un settimo e di più di dieci settantunesimi del diametro stesso.*

Oggi scriveremmo:

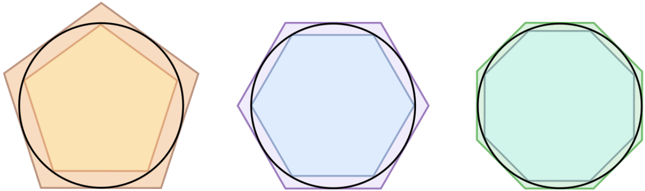
$$\left(3 + \frac{10}{71}\right)\text{diametro} < \text{circonferenza} < \left(3 + \frac{1}{7}\right)\text{diametro}$$

Dividendo per il diametro, si ottiene la stima:

$$3 + \frac{10}{71} = 3{,}140845... < \pi = 3{,}141592... < 3 + \frac{1}{7} = 3{,}142857...$$

Stima di π per esaustione e compressione

Consideriamo un cerchio di raggio $r = 1$. L'idea è quella di intrappolare la lunghezza del diametro 2π tra il perimetro del poligono inscritto e il perimetro del poligono circoscritto:



Otteniamo una sequenza di approssimazioni via via più precise:

$$p_5 < 2\pi < P_5 \qquad p_6 < 2\pi < P_6 \qquad p_8 < 2\pi < P_8$$

Nota: Archimede in realtà usa poligoni con 6, 12, 24, 48 e 96 lati.

L'importanza di π

La precisione dell'approssimazione di π è fondamentale ad esempio

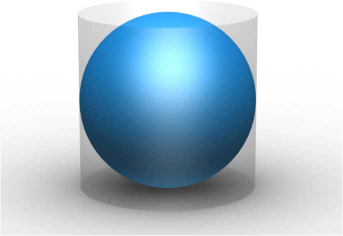
- in astronomia e navigazione
- in architettura e ingegneria

Inoltre, Archimede è affascinato dal ruolo di π nella geometria solida, e trova le relazioni:

$$\frac{\text{superficie sfera}}{\text{raggio}^2} = 4\pi \qquad \frac{\text{volume sfera}}{\text{raggio}^3} = \frac{4}{3}\pi$$

da cui deduce che il rapporto tra volume tra una sfera e il cilindro a essa circoscritto è uguale al rapporto tra la superficie della sfera e la superficie totale del cilindro: 2/3.

La sfera inscritta nel cilindro è il simbolo del genio di Archimede, simbolo che i siracusani scolpirono sulla sua tomba.



Epilogo

Ex eadem urbe humilem homunculum a pulvere et radio excitabo, qui multis annis post fuit, Archimedem. Cuius ego quaestor ignoratum ab Syracusanis, cum esse omnino negarent, saeptum undique et vestitum vepribus et dumetis indagavi sepulcrum. Tenebam enim quosdam senariolos, quos in eius monumento esse inscriptos acceperam, qui declarabant in summo sepulcro **sphaeram esse positam cum cylindro**. **[Cic. Tusc. V 23]**

Dalla stessa città risveglierò dalla polvere e dalla bacchetta un umile piccolo uomo che visse molti anni dopo, Archimede. Di lui io, da questore, esplorai la tomba, ignorata dai Siracusani, dato che negavano assolutamente che ci fosse, (tomba) circondata da ogni parte e ricoperta da rovi e cespugli. Conoscevo infatti alcuni brevi senari che avevo saputo essere scritti nel suo monumento, i quali dichiaravano che in cima al sepolcro era collocata una sfera con un cilindro.

Credits

- Marco Andreatta, "Archimede, l'arte della misura", il Mulino, 2021.
- Archimede da Siracusa, "Arenario" ($\Psi\alpha\mu\mu\acute{\iota}\tau\eta\varsigma$),
  in H. F. Fleck, Quaderni di Scienze Umane e Filosofia Naturale, 2016.
  (https://www.heinrichfleck.net/quaderni/Arenarius.pdf).
- Andre K. T. Assis e C. P. Magnaghi, "Il metodo illustrato di Archimede: usando la legge della leva per calcolare aree, volumi e centri di gravità", 2016.
- Federico G. Lastarìa, "Archimede - la misura del cerchio", 2023.
  (https://home.aero.polimi.it/lastaria/archivio/archimede_misura_cerchio.pdf)
- Lucio Russo, "Archimede, un grande scienziato antico", Carocci, 2019.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!