

Note sulla storia delle equazioni algebriche

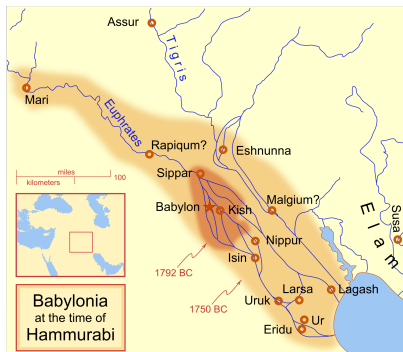
Giuseppe Metere - Università degli Studi di Palermo

December 1, 2016

I *Gli albori*

Primo impero babilonese

La nostra storia inizia circa 3800 anni fa...



... nella cosiddetta Mezzaluna Fertile, tra i fiumi Tigri ed Eufrate - Mesopotamia - crogiuolo di popoli e culture

- ~1790 aC, Hammurabi fonda il Primo Impero Babilonese
- Lingua: accadico, scrittura cuneiforme

Matematica babilonese

Nel 1937, l'austriaco O. Neugebauer scrive *Mathematische Keilschrift-Texte*, il primo studio sulle tavolette dell'era di Hammurabi dal contenuto matematico, seguito da *Mathematical Cuneiform Texts* (1945), in collaborazione con l'americano A. Sachs.

Queste erano di due tipi:

- tabelle numeriche
- problemi

Ad esempio, le tavole dei quadrati venivano usate per eseguire le moltiplicazioni:

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4}$$

I babilonesi conoscevano questa formula?

La conoscevano come algoritmo, ma non avevano i simboli per rappresentarla.

Matematica babilonese

Scheda (Come scrivevano i numeri i babilonesi)

I babilonesi avevano un sistema posizionale in base 60.

Ad esempio:




























































- $\langle \Upsilon \Upsilon \rangle$ e $\langle \text{III} \text{III} \text{III} \rangle$ stanno a indicare i numeri 15 e 23,
- $\langle \Upsilon \Upsilon \rangle \langle \text{III} \text{III} \text{III} \rangle$ sta per $(15 \times 60) + 23 = 923$.

I babilonesi non avevano un simbolo per lo zero, anche se talvolta lasciavano uno spazio per indicare la posizione vuota, e solo con i seleucidi - periodo ellenistico - un simbolo per lo zero verrà introdotto.

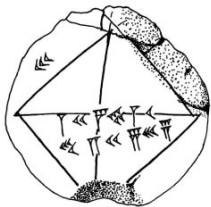
Purtroppo, il sistema posizionale non venne adottato né dai greci né dai romani. Riapparirà solo molti anni dopo, con il sistema di numerazione indo-arabo.

[tratto da J.H. Conway, R.K. Guy - The book of Numbers]

Matematica babilonese: i numeri

 1	 11	 21	 31	 41	 51
 2	 12	 22	 32	 42	 52
 3	 13	 23	 33	 43	 53
 4	 14	 24	 34	 44	 54
 5	 15	 25	 35	 45	 55
 6	 16	 26	 36	 46	 56
 7	 17	 27	 37	 47	 57
 8	 18	 28	 38	 48	 58
 9	 19	 29	 39	 49	 59
 10	 20	 30	 40	 50	

Matematica babilonese



Nella tavoletta
YBC 7289 (1800–1600
aC, Univ. Yale)
è riportato il valore del
rapporto diagonale/lato
di un quadrato:

$$1; 24, 51, 10 .$$

Per quanto detto, si calcola:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.4142129629629 \dots$$

Quali competenze possedevano i babilonesi per ottenere questo risultato?
Probabilmente conoscevano il cosiddetto *metodo della media*.

Matematica babilonese

Calcolo di $\sqrt{2}$ con il metodo della media.

- 1 Prendiamo a_1 come prima approssimazione.
- 2 Se $a_1 < \sqrt{2}$, allora $\frac{2}{a_1} > \sqrt{2}$, e il loro prodotto è ovviamente 2, per cui calcoliamo

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{2}{a_1} \right).$$

- 3 Ripetiamo il procedimento con a_2 .

Se iniziamo dal valore (sessagesimale) $1;25$ e applichiamo il procedimento usando l'aritmetica babilonese (senza arrotondare), otteniamo precisamente $1;24,51,10$.

Si noti che l'approssimazione $\sqrt{2} = 1;25 = 1.4166\dots$ era comunemente usata come approssimazione più grossolana.

Il metodo può essere facilmente adattato al calcolo di altre radici.

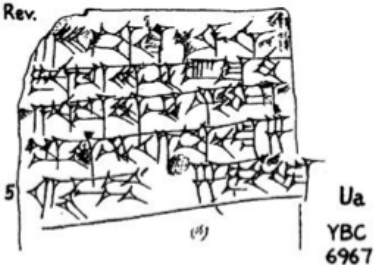
Matematica babilonese

Possiamo allora affermare che il pensiero algebrico nasca con la matematica babilonese?

Probabilmente non l'algebra simbolica, ma il discorso è diverso se ci riferiamo alla cosiddetta **algebra retorica**, verbale e senza simbologie. Infatti, nei problemi matematici babilonesi, i procedimenti erano espressi a parole, e le incognite erano espresse utilizzando termini tratti dalla geometria o dalla quotidianità, anche se erano utilizzati in maniera del tutto astratta.

A titolo di esempio riportiamo [Derbyshire 2001] un problema tratto dal citato *Mathematical Cuneiform Texts* nella sua traduzione letterale e nella versione trascritta nella simbologia matematica contemporanea.

Matematica babilonese: tavoletta YBC 6967



Matematica babilonese: traduzione di YBC 6967

*[L'**igib**]um supera l'**igum** di 7.*

*Quanto sono [l'**igum** e] l'**igibum**?*

*Quanto a te - dimezza 7, di cui l'**igibum** supera l'**igum**, e (il risultato è) 3;30.*

Moltiplica insieme 3;30 con 3;30 e (il risultato è) 12;15.

A 12;15, che hai come risultato, aggiungi [1,0, il prodo]tto,

e (il risultato è) 1,12;15.

Qual è [la radice quadrata di 1,1]2;15? (Risposta:) 8;30.

Metti da parte [8;30 e] 8;30, il suo uguale, e dopo

*sottrai 3;30, il **takiltum**, da uno,
aggiungi (questo) all'altro.*

Uno è 12, l'altro 5.

*12 è l'**igibum**, 5 l'**igum**.*

Nota: Il testo è in accadico, tranne le parole in grassetto che sono nell'originale in sumerico. Le parti tra parentesi quadre sono poco chiare o indecifrate.

Matematica babilonese: YBC 6967

Un numero supera il suo **reciproco** di 7:

$$x - \frac{60}{x} = 7$$

Che cosa sono x e il suo **reciproco**?

Oggi, possiamo riscrivere l'equazione $x^2 - 7x - 60 = 0$, e applicare la nota formula risolutiva, ottenendo le soluzioni $x = 12$ e $x = -5$.

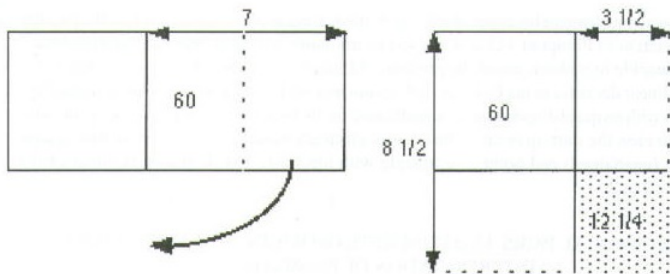
Ma i babilonesi non conoscevano i numeri negativi, e per cui forniscono l'unica soluzione 12, e il suo reciproco 5.

Infatti il loro algoritmo fornisce la sola soluzione positiva:

$$x = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 60} \pm \frac{7}{2}$$

Matematica babilonese: YBC 6967

L'algoritmo si basa su una tecnica di *completamento del quadrato*.



disegno di E. Robson, in *Historia Mathematica*, vol. 28, 2001

$$x^2 - 7x - 60 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 60$$

Algebra babilonese?

Quanto riportato ci lascia con l'idea che i babilonesi siano stati effettivamente dei precursori del pensiero algebrico successivo.

I babilonesi affrontarono equazioni di secondo grado, particolari equazioni di grado superiore ai sistemi e particolari sistemi.

Essi non disponevano ancora di un linguaggio sufficientemente astratto da descrivere in termini generali i procedimenti che utilizzavano, tuttavia attraverso la risoluzione di specifici problemi, mostravano chiaramente come applicare i loro algoritmi.

Certamente possiamo affermare che gli studiosi babilonesi disponevano di una matematica raffinata, in specie considerando che si tratta di una civiltà dell'età del bronzo!

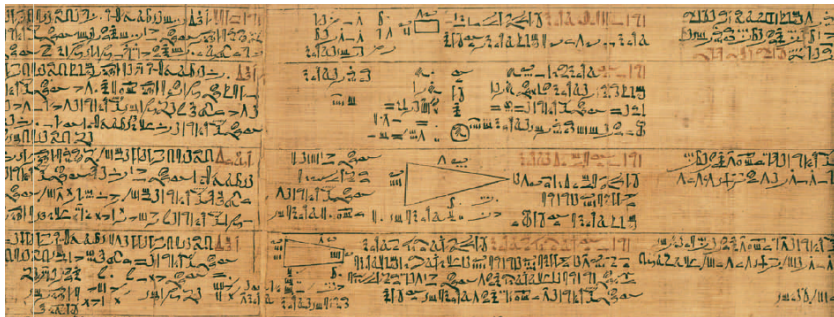
Gli egizi

Non lontano dalla mezzaluna fertile, mentre i successori di Hammurabi consolidavano il potere dell'impero di Babilonia, l'Egitto si trovava a fronteggiare la sua prima invasione straniera a opera degli Hyksos (~1700 aC). Leggiamo l'opinione del Boyer [1991].

[... Babylonian algebra] reached a considerably higher level in Mesopotamia than in Egypt. Many problem texts from the Old Babylonian period show that the solution of the complete three-term quadratic equation afforded the Babylonians no serious difficulty, for flexible algebraic operations had been developed. They could transpose terms in an equations by adding equals to equals, and they could multiply both sides by like quantities to remove fractions or to eliminate factors. [...] Egyptian algebra had been much concerned with linear equations, but the Babylonians evidently found these too elementary for much attention. [...] In another problem in an Old Babylonian text we find two simultaneous linear equations in two unknown quantities, called respectively the first silver ring and the second silver ring.

Gli egizi

Durante il dominio degli Hiksos, visse il primo matematico di cui si conosca il nome. Si tratta dello scriba **Ahmes**. Abbiamo informazioni su di lui da un unico papiro, il papiro di Ahmes (o di Rhind, dal nome dello scopritore), del 1650 aC. È questo uno dei migliori esempi di matematica egizia.



Gli egizi

Il contenuto **algebrico** del papiro di Ahmes si può ricondurre essenzialmente a quattro problemi di tipo *Aha* (=incognita). Vediamone un esempio.

Problema 24: *trova il mucchio, se il mucchio insieme a un settimo del mucchio fanno 19.*

In notazione algebrica moderna, avremmo potuto scrivere:

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

e risolvere la x .

Nel testo originale il problema viene risolto mediante il metodo della *falsa posizione*.

In conclusione

Afferma il Derbyshire [op. cit.], a proposito dello sviluppo storico dell'algebra:

È davvero meraviglioso che disponendo soltanto di metodi così primitivi per la scrittura dei numeri, questi antichi popoli siano riusciti a progredire a tal punto. Forse però è ancora più stupefacente che nei secoli seguenti avanzarono così poco.

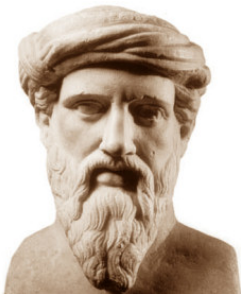
Dovranno passare infatti circa 15 secoli per avere dei progressi significativi nello studio delle equazioni algebriche.

Questo avverrà ancora una volta in Egitto, ma attraverso l'opera del matematico ellenistico **Diofanto di Alessandria**.

II L'algebra greca antica e Diofanto

La matematica della grecia classica

Abbiamo visto che già circa 4000 anni fa l'umanità aveva elaborato dei sistemi piuttosto sofisticati per risolvere problemi matematici più o meno concreti. Tuttavia, né la matematica babilonese, né tantomeno quella egizia, erano strutturate in modo razionale e sistematico.



Probabilmente, fu Pitagora (Samo 570 a.C. - Metaponto 495 a.C.) che per primo cominciò a dare un assetto logico/razionale alla Matematica. Il termine *μαθηματικά* fu introdotto proprio dalla sua scuola, da *μαθημα*, insegnamento.

La matematica della grecia classica

La matematica di Pitagora è matematica del discreto.

L'idea era che la sostanza primitiva, origine di tutte le cose ($\alpha\rho\chi\eta$) fosse organizzata a partire da monadi, unità primordiali indivisibili.

Da questo punto di vista, ad esempio, un segmento di retta è effettivamente composto da punti, **punti materiali**.

L'idea del mondo che ne scaturiva era basata sulla convinzione che i numeri (interi) e i rapporti tra i numeri fossero “gli elementi di tutte le cose” [Aristotele].

La matematica della grecia classica



Le concezioni
dei pitagorici furono messe in crisi proprio
dal teorema che oggi porta il nome di Pitagora.
La scoperta di grandezze incommensurabili
che ne conseguì, come ad esempio la
diagonale e il lato di un quadrato, aprì la strada
ai numeri irrazionali, che, come scrive Derbyshire

[...] disturbò così tanto i pitagorici da farli allontanare dall'aritmetica, che sembrava contenere numeri impossibili da scrivere, a favore della geometria, dove tali numeri potevano essere sempre rappresentati con lunghezze di segmenti.

La matematica ellenistica

Il periodo ellenistico si colloca tra la morte di Alessandro III il Macedone (323 a.C.) e la morte di Cleopatra d'Egitto (30 a.C.).

Importante centro di cultura e di commercio internazionale è la città di Alessandria, capitale dell'Egitto tolemaico.

Tolomeo I fonda

- il **museo**, dedicato alle muse, divinità protettrici delle scienze e delle arti
- la **biblioteca**, luogo ove venivano conservati i libri

Ciascuna nave che entrava in Alessandria, veniva setacciata alla ricerca di libri che venivano momentaneamente requisiti per poi essere copiati e quindi restituiti. In tal modo, la biblioteca si ampliò fino a contenere quasi mezzo milione di rotoli o libri.

*[Lionel Casson, *Libraries in the Ancient World*, Yale U.P. (2001)]*

La matematica ellenistica: i numeri

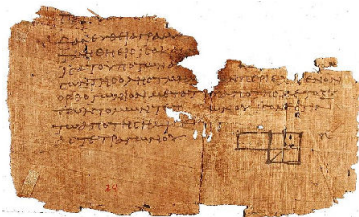
1 = α	10 = ι	100 = ρ
2 = β	20 = κ	200 = σ
3 = γ	30 = λ	300 = τ
4 = δ	40 = μ	400 = υ
5 = ϵ	50 = ν	500 = ϕ
6 = ζ (f)	60 = ξ	600 = χ
7 = ζ	70 = \omicron	700 = ψ
8 = η	80 = π	800 = ω
9 = θ	90 = φ	900 = $\var�$

I greci antichi avevano un sistema di numerazione additivo, basato sui multipli delle prime tre potenze di 10. Per questo avevano bisogno di 27 simboli: le 24 lettere dell'alfabeto greco, più 3 lettere arcaiche.

La matematica ellenistica: Euclide

Riferisce il Boyer che Tolomeo I chiamò a insegnare presso il suo Museo:

[...] un gruppo di eminenti studiosi, tra cui l'autore del più fortunato manuale di matematica che sia mai stato scritto: gli Elementi di Euclide.



Nei tredici volumi che lo compongono, gli Elementi trattano argomenti di geometria piana, ma anche di aritmetica, di numeri irrazionali, di geometria solida.

Concetti propriamente algebrici, tuttavia, ne troviamo soltanto in forma geometrica.

Diofanto di Alessandria



Poco si sa della sua biografia. Nacque probabilmente tra il 201 d.C. e il 215 d.C., e morì all'età di 84 anni. Il suo lavoro più importante è il trattato in 13 volumi: l'**Arithmetica**. Poco più della metà di essi sono disponibili ai giorni nostri. Nell'*Arithmetica*, Diofanto mostra in 189 problemi come trovare numeri, o famiglie di numeri, che soddisfano diverse condizioni. Oggi diremmo che risolve equazioni, determinate e indeterminate, a valori negli interi, quelle che

appunto chiamiamo **equazioni diofantee**.

Diofanto di Alessandria

Una curiosità

Tra le equazioni diofantee, sicuramente una delle più famose è quella citata nel cosiddetto ultimo teorema di Fermat: $a^n + b^n = c^n$.

Ecco cosa annotava Pierre de Fermat nel 1637 nello stretto margine di una edizione dell'Arithmetica di Dioniso:

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Non sappiamo se Fermat avesse veramente trovato una tale meravigliosa dimostrazione (il teorema verrà dimostrato da Andrew Wiles nel 1995).

Diofanto di Alessandria

Una curiosità

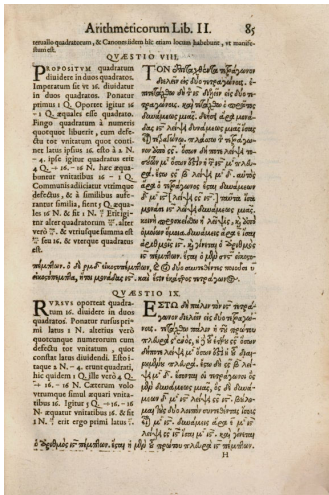
Tra le equazioni diofantee, sicuramente una delle più famose è quella citata nel cosiddetto ultimo teorema di Fermat: $a^n + b^n = c^n$.

Ecco cosa annotava Pierre de Fermat nel 1637 nello stretto margine di una edizione dell'Arithmetica di Dioniso:

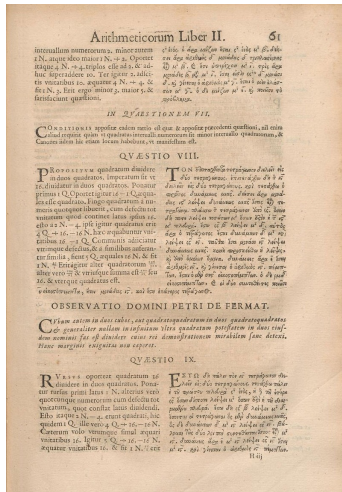
È impossibile separare un cubo in due cubi, o una potenza quarta in due potenze quarte, o in generale, tutte le potenze maggiori di 2 come somma della stessa potenza. Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina.

Non sappiamo se Fermat avesse veramente trovato una tale meravigliosa dimostrazione (il teorema verrà dimostrato da Andrew Wiles nel 1995).

Quaestio II.8 dell'Arithmetica di Diofanto



Quaestio II.8 nell'edizione del 1621



Quaestio II.8 nell'edizione del 1670

Diofanto di Alessandria

A Diofanto si fa risalire il primo tentativo di simbolismo algebrico.

Come in ogni buon libro di matematica, all'inizio dell'Arithmetica, l'autore ci spiega il suo simbolismo. Riportiamo un esempio chiarificatore dal Derbyshire.

Consideriamo l'equazione:

$$x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$$

Diofanto la scriveva così:

$$K^Y \bar{\alpha} \bar{\varsigma} \bar{\iota} \pitchfork \Delta^Y \bar{\beta} \mathbf{M} \bar{\alpha}' \iota \sigma \mathbf{M} \bar{\epsilon}$$

Si riconoscono immediatamente i numerali, rappresentati da lettere dell'alfabeto barrate: $\bar{\alpha} = 1$, $\bar{\beta} = 2$, $\bar{\epsilon} = 5$ e $\bar{\iota} = 10$.

L'abbreviazione $\iota \sigma$ sta per $\iota \sigma \omicron \varsigma$, che significa "uguale". Il tridente invertito \pitchfork indica la sottrazione di tutto quello che segue.

Diofanto di Alessandria

Dell'espressione iniziale:

$$K^Y \bar{\alpha} \zeta \bar{\iota} \bar{\eta} \Delta^Y \bar{\beta} \dot{M} \bar{\alpha}' \iota \sigma \dot{M} \bar{\epsilon}$$

restano da spiegare allora solo quattro simboli: K^Y , ζ , Δ^Y e \dot{M} .
 ζ è l'incognita, la nostra x . Gli altri rappresentano le potenze dell'incognita: K^Y è la terza potenza dell'incognita (dal greco $\kappa\acute{\upsilon}\beta\omicron\varsigma$), Δ^Y il quadrato (da $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$) e \dot{M} la potenza zero.

Una traduzione letterale dell'equazione iniziale è:

$$x^3 1 x 10 - x^2 2 x^0 1 = x^0 5$$

ovvero:

$$(x^3 1 + x 10) - (x^2 2 + x^0 1) = x^0 5$$

ossia proprio:

$$x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$$

Diofanto di Alessandria

Da quanto visto concludiamo che Diofanto possedeva una notazione piuttosto sofisticata ed espressiva

Ad esempio, in presenza dell'incognita ς , l'uguaglianza era utilizzata proprio come la intendiamo oggi all'interno di una equazione, cioè come una domanda: esistono dei valori numerici da sostituire a ς perché l'uguaglianza sia verificata?

Tuttavia questo sistema aveva anche dei limiti. Ad esempio, non era adatto a rappresentare equazioni contenenti più di una incognita. Questa limitazione era tanto più grave se pensiamo che gran parte delle equazioni affrontate nell'Arithmetica erano indeterminate.

Per vedere come Diofanto aggirava questo problema dobbiamo ritornare a quella pagina il cui margine era troppo stretto perché Fermat potesse scrivere la sua *demonstrationem mirabilem*.

Diofanto di Alessandria

Problema 8 del Libro II.

Scomporre un numero quadrato in due numeri quadrati.

In termini moderni avremmo scritto: dato un numero a , trovare due numeri x e y tali che $a^2 = x^2 + y^2$.

Diofanto risolve il problema come segue.

- Assegna a a^2 il valore 16. Cerca allora x e y tali che $x^2 + y^2 = 16$.
- Scrive y in funzione di x : $y = 2x - 4$.
- Sostituisce e ottiene: $x^2 + (2x - 4)^2 = 16$.
- Trova l'unica soluzione positiva $x = \frac{16}{5}$, e di conseguenza $x = \frac{12}{5}$

Si noti che Diofanto ignora la soluzione $x = 0$.

Si noti pure che il problema, sebbene risolto ricorrendo a numeri razionali, è associato a un problema relativo agli interi:

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16^2 + 12^2 = 20^2.$$

Diofanto di Alessandria

Inoltre, sebbene presenti una singola soluzione particolare, Diofanto è consapevole del fatto che vi siano altre soluzioni. Egli sembra semplicemente voler indicare una strategia per risolvere il problema, in modo da ricondurlo a un altro problema che sa esprimere con il suo simbolismo e quindi affrontare.

Diofanto padre dell'algebra

Abbiamo presentato tanti argomenti fin qui che suggeriscono che Diofanto meriti di essere chiamato *padre dell'Algebra*.

Tuttavia, non tutti sono concordi su questo punto. Ad esempio l'autorevole testo di van der Waerden ha titolo:

A history of algebra: from Al-Khwarizmi to Emmy Noether

Il fatto è che, sebbene Diofanto introduca un efficiente simbolismo per trattare le equazioni algebriche, non sembra interessato allo studio delle equazioni come oggetti matematici *per se*.

Questo punto di vista sarà invece centrale nell'opera di Al-Khwarizmi.

Alessandria, gli ultimi anni



Dopo circa 300 anni di cultura greca, e altri 300 di dominazione romana, in che situazione si trovava la città di Alessandria? E più in generale, quale era il contesto politico, culturale e religioso dei popoli che si affacciavano sul mediterraneo?

Sicuramente, il dato nuovo che interveniva prepotentemente era l'affermarsi di una nuova religione: il cristianesimo.

Ipazia di Alessandria



Non possiamo parlare di questi tumultuosi anni della storia di Alessandria senza citare la storia di **Ipazia**.

Ipazia è la prima donna della storia della matematica. Nata ad Alessandria nel 370 ca (figlia di Teone, ultimo direttore del Museo), lì morì nel 415. Riportiamo stralci della sua biografia dal sito *MATEpristem*.

Ipazia di Alessandria

Ipazia nacque ad Alessandria d'Egitto, capitale delle scienze dell'Impero Romano e crebbe nel colto ambiente Alessandrino. Ricevette un'istruzione di prim'ordine dal padre Teone, matematico e astronomo, direttore del "Museion", la più famosa Accademia dell'antichità. Approfondì i suoi studi presso la Scuola neoplatonica, oltre che ad Atene e in Italia.

Ipazia era ammirata per la sua bellezza e la sua saggezza, ma non si sposò mai e all'età di 31 anni assunse la direzione della Scuola neoplatonica di Alessandria. Insegnante di matematica e di filosofia, ella fu un'autorità e un indiscusso punto di riferimento culturale nello scenario dell'epoca. Scrisse trattati di matematica e compilò tavole astronomiche.

La sua opera più significativa è un commento in tredici volumi all'Aritmetica di Diofanto (II sec.), il "padre dell'algebra", cui si devono lo studio delle equazioni indeterminate - le diofantee - e importanti elaborazioni delle equazioni quadratiche. Nel suo commento, Ipazia sviluppò soluzioni alternative a vecchi problemi e ne formulò di nuovi che vennero inglobati in seguito nell'opera di Diofanto.

Ipazia di Alessandria

[...] Nonostante visse in un'epoca fortemente influenzata dalla misoginia aristotelica, in cui le donne venivano considerate esseri inferiori, Ipazia divenne così celebre per il suo acume filosofico che molti affrontavano lunghi viaggi per ascoltare le sue lezioni. La sua vita si concluse con una tragica morte, dovuta alle persecuzioni cristiane contro i rappresentanti della scienza ellenistica, che proponevano un razionalismo inconciliabile con la religione emergente. Accadde infatti che alcuni cristiani tra cui il vescovo Cirillo, divenuto Patriarca di Alessandria nel 412, sfruttarono abilmente i conflitti sociali tra le diverse etnie esistenti in città e, dopo la cacciata degli ebrei, iniziarono la sua epurazione dagli "eretici" neoplatonici.

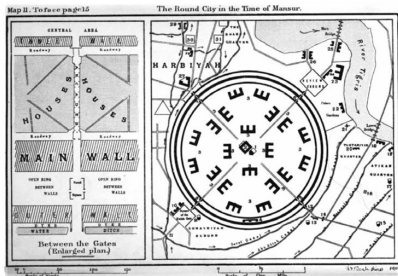
Fu così che Ipazia, pagana, ma convinta sostenitrice della distinzione tra religione e conoscenza, donna che rappresentava una provocazione per la sua condotta di vita indipendente, per l'impegno civile e per la sua influenza politica, cadde vittima di tale persecuzione. Durante un agguato, tesole da un gruppo di fanatici cristiani, fu fatta letteralmente a pezzi. Con lei rnoriva l'ultima scienziata eminente di quell'epoca. L'antica filosofia e scienza ellenistiche vennero riscoperte soltanto nel Rinascimento, un millennio dopo.

III L'algebra islamica

Baghdad, l'età dell'oro

Alessandria cadde il 23 dicembre del 640, dopo 14 mesi di assedio, ad opera delle armate mussulmane di Amr ibn al-'As, e tutto l'Egitto passò dai bizantini agli islamici.

In seguito a complicate vicende che esulano dalla nostra narrazione, la dinastia di al-Abba's fondò nell'anno 820 una nuova capitale, Baghdad.



Questa sarà uno dei più importanti centri culturali e commerciali del mondo (arabo, ma non solo) fino al 1258, quando verrà saccheggiata dai mongoli di Gengis Kahn.

Baghdad, l'età dell'oro

750-1258 Abbasid Dynasty - Baghdad



Baghdad, l'età dell'oro

Il suo ruolo e la sua posizione geografica, rendevano Baghdad città cosmopolita per eccellenza.

Per quanto riguarda la storia del pensiero matematico, a Baghdad interagiscono diverse storie e culture.

⇒ i **persiani**, con la loro tradizione Zoroastriana, che abitavano quelle terre già da 1400 anni.

⇒ gli **indiani**, che portarono i numeri, appunto, *indiani*, che comprendevano un simbolo per lo zero (Brahmagupta, 598-670).

⇒ i **cinesi**, che avevano sviluppato una propria cultura matematica in modo indipendente: *Jiuzhang suanshu* (Nove capitoli sull'arte matematica) fu scritto al tempo della dinastia degli Han anteriori (202 aC - 9 d.c.), ed è precursore di una tecnica matriciale per risolvere i sistemi oggi nota come eliminazione di Gauss.

Baghdad, l'età dell'oro

Quello che mancava era un Accademia, un luogo dove poter conservare e consultare documenti scritti, studiare e insegnare la scienza e le arti.

Durante il regno del settimo califfo abbaside, al-Ma'mūn, venne fondata Dar al-Hik-ma, la Casa della Sapienza.

[Baghdad, sotto al-Ma'mūn,] in letteratura, arte e scienza [...] condivideva la supremazia mondiale con Cordova; in commercio e ricchezza di gran lunga superava quella città.

Sir Henry Rawlinson

Fu in questo periodo che visse e operò **al-Khwārismī**.

L'algebra di al-Khwārisīmī

Muhammad ibn Musa al-Khwārisīmī nacque (probabilmente) a Khwārezm nel 780 circa, e morì a Baghdad nell'850 circa. Operò a Baghdad presso la Casa della Sapienza, di cui fu direttore. Sotto la sua direzione, furono tradotte in arabo numerose opere matematiche ellenistiche, ma anche persiane, babilonesi e indiane. Di al-Khwārisīmī sono conservate cinque opere: di aritmetica, algebra, astronomia, geografia e sul calendario. In questa sede, prenderemo in considerazione solo le prime due.



L'algebra di al-Khwārisīmī

Il libro di aritmetica si conosce attraverso la sua traduzione latina del XIII secolo: **Algoritmi de numerum indorum**.

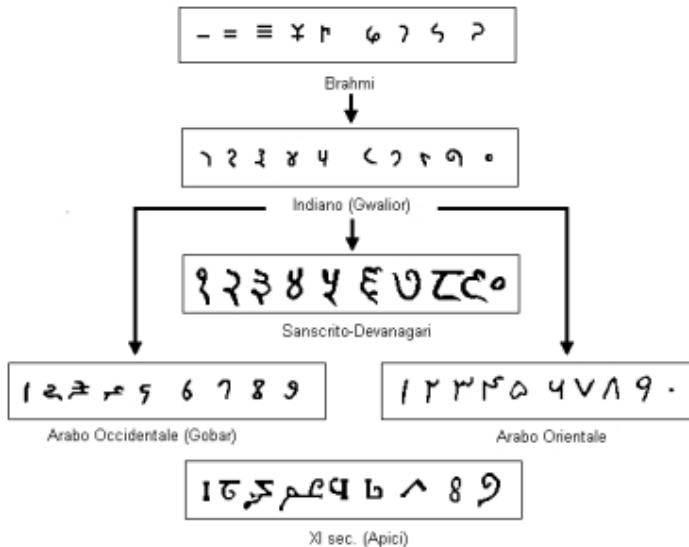
In questo libro, al-Khwārisīmī descrive il sistema di numerazione posizionale in base decimale usato dagli indiani.

Questo sistema è quello che usiamo ancora oggi, e si compone di dieci simboli (cifre), compreso un simbolo per lo zero.

Un primo studio dello zero, dovuto a Brahmagupta, risale al 628.

Rispetto ai sistemi di numerazione preesistenti, i numeri indo-arabi sono particolarmente indicati per il calcolo - algoritmo.

L'algebra di al-Khwārisīmī



L'algebra di al-Khwārisīmī

Il secondo libro è il libro di algebra e aritmetica, il celeberrimo

al-Kitab al-mukhtasar fi al-gabr wa'l-muqabala

ossia

Manuale di calcolo per completamento e riduzione

Una versione in arabo del 1342 è conservata a Oxford. Tra le versioni latine più famose ricordiamo quella di Robert of Chester (Segovia, 1145)

Liber algebrae et almucabala

e quella di Gherardo da Cremona (Toledo).

L'al-Kitab si compone di tre parti:

- soluzione di equazioni quadratiche;
- misurazione di aree e volumi;
- questioni di divisione di eredità secondo la legge coranica.

L'algebra di al-Khwārisīmī



L'algebra di al-Khwārisīmī

La prima parte è quella più propriamente algebrica, dove tratta di equazioni di primo e secondo grado a coefficienti numerici.

Contrariamente a quanto abbiamo visto per i suoi predecessori, al-Khwārisīmī non parte da problemi aritmetici o geometrici per risolverli con un equazioni, ma viceversa parte da una classificazione delle equazioni per poi giungere ai problemi.

Sebbene viva circa 600 anni dopo Diofanto, l'algebra di al-Khwārisīmī è esclusivamente retorica. I numeri sono chiamati **dirham**, l'incognita è **say'** (cosa) o **gizr** (radice... anche quadrata!) e **mal** (possedimento) indica il quadrato dell'incognita.

Un passo indietro rispetto a Diofanto? Vediamo un esempio dal Derbyshire.

L'algebra di al-Khwārisīmī

L'equazione che noi scriveremmo come

$$x^2 + 10x = 39$$

e che Diofanto avrebbe scritto

$$\Delta^Y \bar{\alpha} \zeta \bar{\iota}' \iota \sigma \mathbf{M} \bar{\lambda} \bar{\theta}$$

compare nel libro di al-Khwārisīmī come:

Un quadrato e dieci radici dello stesso hanno per somma trentanove dirham; vale a dire, quale deve essere il quadrato che, quando aumentato di dieci delle stesse sue radici equivale a trentanove?

Commenta van der Waerden:

“Possiamo escludere la possibilità che l'opera di al-Khwārisīmī sia stata molto influenzata dalla matematica greca classica”

L'algebra di al-Khwārisīmī

al-Khwārisīmī classifica sei tipi fondamentali di equazioni di primo e secondo grado:

- 1 I quadrati sono uguali alle radici: $ax^2 = bx$
- 2 I quadrati sono uguali a un numero: $ax^2 = c$
- 3 Le radici sono uguali a un numero $bx = c$
- 4 I quadrati e le radici sono uguali a un numero: $ax^2 + bx = c$
- 5 I quadrati e i numeri sono uguali alle radici: $ax^2 + c = bx$
- 6 Le radici e i numeri sono uguali ai quadrati: $bx + c = ax^2$

Delle equazioni in queste forme canoniche, al-Khwārisīmī indica il modo di risolverle, giustificando i passaggi geometricamente.

Tuttavia, per ridurre una qualunque equazione di primo o secondo grado a una di queste sei, introduce delle tecniche di manipolazione simbolica:

- **al-jabr**: il completamento, il riempimento (latino *restauratio*);
- **al-muqabala**: il bilanciamento (latino *oppositio*);
- **al-hatt**: la riduzione del coefficiente di secondo grado.

L'algebra di al-Khwārisīmī

Vediamo un esempio. Consideriamo l'equazione:

$$x^2 + (4 - x)^2 = 10$$

applichiamo al-jabr

$$2x^2 + 16 - 8x = 10$$

applichiamo al-muqabala

$$2x^2 + 6 = 8x$$

ottenendo una equazione del tipo (5) alla quale applichiamo al-hatt

$$x^2 + 3 = 4x$$

che possiamo risolvere (per radicali. . . geometricamente).

L'algebra di al-Khwārisīmī

Le tecniche geometriche di risoluzione delle equazioni quadratiche erano probabilmente ereditate dalla tradizione matematica greca. La soluzione di una equazione era spesso corredata da disegni e costruzioni che ne giustificavano i vari passaggi rappresentati da trasformazioni di figure geometriche equiscomponibili.

Analizziamo più nel dettaglio alcuni esempi, riportati integralmente da:

**L'algebra nella matematica islamica,
Il giardino di Archimede (unifi).**

علي تسعة وثلاثين ليتم السطح الأعظم الذي هو سطح ره فبيع ذلكت كله أربعة وستين فاختدنا جذرها وهو ثمانية وهو أحد اضلاع السطح الأعظم فإذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح أب الذي هو المال وهو جذره والمال تسعة وهذه صورته



وأما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا نجعل المال سطحاً مربعاً مجهول الاضلاع وهو سطح أد ثم نضم اليه سطحاً متبازي الاضلاع عرضه مثل أحد اضلاع سطح أد وهو ضلع دن والسطح دب فصار طول السطحين جميعاً ضلع ج ه وقد علمنا ان طوله عشرة من العدد لان كل سطح مربع محاسوي الاضلاع والزوايا فان أحد اضلاعه منسوباً في واحد جذر ذلكت السطح وفي اثنين جذراه فلما قال مال واحد وعشرون يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول ضلع ه ج عشرة اعداد لان ضلع ج د جذر المال فقسماً ضلع ج ه بنصفين علي نقطة

L'algebra di al-Khwārisīmī

al-Khwārisīmī inizia con l'equazione

$$x^2 + 10x = 39,$$

che rappresenta il tipo: *Radici e quadrati uguali a numeri.*

Egli afferma:

La soluzione è: dividi a metà il numero delle radici, che in questo caso dà 5. Moltiplica questo per se stesso: il prodotto è 25. Aggiungilo a 39, ottenendo 64. Ora prendi la radice di questo, che è 8 e sottrai da questo la metà delle radici, 5; il resto è 3. Questa è la radice del quadrato che cercavi e il suo quadrato è 9.

L'algebra di al-Khwārisīmī

In notazioni moderne, l'equazione è rappresentabile con $x^2 + px = q$ ed è risolta con la regola

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$$

Alle regole risolutive con i radicali, come si è già detto, al-Khwārisīmī fa seguire la dimostrazione geometrica che, in questo caso, presenta due diverse costruzioni, corrispondenti al procedimento noto come *completamento del quadrato*.

L'algebra di al-Khwārisīmī

La prima [dimostrazione] consiste nel costruire il quadrato x^2 e quattro rettangoli di altezza $10/4$ sui lati di quello (v. Fig. 1). Si completa poi la figura con quattro quadrati di lato $10/4$. Si ottiene così, sapendo che $x^2 + 10x = 39$, un quadrato di area $39 + 4 \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 64$ il cui lato $x + 2 \left(\frac{10}{4}\right)$ misura 8. Si deduce quindi $x = 3$.

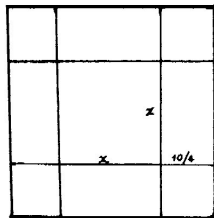


Fig. 1

L'algebra di al-Khwārisīmī

Queste trasformazioni geometriche corrispondono alle seguenti trasformazioni algebriche:

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 + 4\left(\frac{p}{4}x\right) + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

$$\left(x + 2\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

$$x + 2\frac{p}{4} = \sqrt{q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2}$$

da cui la regola data da al-Khwārisīmī e riportata sopra.

L'algebra di al-Khwārisīmī

La seconda dimostrazione geometrica si deduce dalla Fig. 2 e corrisponde alla seguente trasformazione:

$$x^2 + 2\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

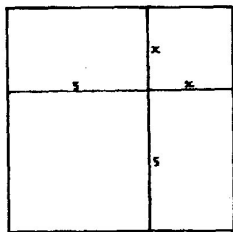


Fig. 2

L'algebra di al-Khwārisīmī

Nel caso dell'equazione del tipo (5) $x^2 + q = px$, al-Khwārisīmī sa che si possono avere due radici oppure una sola (doppia) o nessuna (quando le radici non sono reali).

Scrive al-Khwārisīmī:

Se tu affronti un problema che si riconduce a questo tipo di equazione, verifica l'esattezza della soluzione con l'addizione, come si è detto. Se non è possibile risolverlo con l'addizione, otterrai certamente il risultato con la sottrazione. Questo è il solo tipo in cui ci si serve dell'addizione e della sottrazione, cosa che non trovi nei tipi precedenti. Devi inoltre sapere che se in questo caso tu dividi a metà la radice e la moltiplichi per se stessa e il prodotto risulta minore del numero che è aggiunto al quadrato, allora il problema è impossibile. Se invece risulta uguale al numero, ne segue che la radice del quadrato sarà uguale alla metà delle radici che sono col quadrato, senza che si tolga o si aggiunga qualcosa.

Gli ultimi due casi corrispondono ad avere discriminante negativo $(p/2)^2 < q$, dunque nessuna soluzione in campo reale, e discriminante nullo, vale a dire due soluzioni coincidenti ($x = p/2$).

L'algebra islamica dopo al-Khwārisīmī

Elenchiamo brevemente alcuni matematici islamici successivi a al-Khwārisīmī:

- **Abu Kamil** (850-930): considera anche le potenze dell'incognita superiori a 2, elabora formule per manipolare espressioni radicali, che poi usa per determinare l'incognita.
- **Muhammad al-Karaji** (953-1029), persiano, scrive l'*Al-Fahri*, un fondamentale trattato di algebra in cui integra il lavoro di Abu Kamil con l'algebra Diofantea. Produce e formule per il quadrato e il cubo di un binomio, e (forse) anche delle potenze superiori. Descrive le proprietà delle potenze: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, etc.
- **'Omar Khayyām** (1048-1131): è stato un matematico, astronomo, poeta e filosofo persiano. A lui dedichiamo le ultime slides sulla matematica islamica.

Il tempo di 'Omar Khayyām

'Omar Khayyām è conosciuto soprattutto come l'autore del *Rubāyyāt*, una raccolta di quartine, tradotte in inglese da Edward Fitzgerald nel 1859.

Khayyām visse circa 250 anni dopo al-Khwārisīm nell'area estremo-orientale delle terre dell'islam. In queste terre, vi erano allora aspri conflitti

- **etnici:** persiani, arabi, turchi:
- **religiosi:** prima tra sunniti e sciiti, poi tra sciiti e ismailiti (una setta separatista degli sciiti).

I turchi erano di origine nomadi, inizialmente mercenari al servizio dei califfi abbasidi, poi al servizio dei persiani - subentrati agli abbasidi. Già di fede sunnita, rovesciarono i dominatori persiani instaurando la dinastia ghaznavide. Era così nato il primo Impero turco.

Nel 1037, Selgiūq, uno dei mercenari turchi al servizio dei ghaznavidi, si ribellò e ne sconfisse l'esercito. Un nuovo regno era nato: nel 1055 (Khayyām aveva sette anni) il nipote di Selgiūq prese Baghdad, e si proclamò Sultān, ovvero sovrano. Di conseguenza, il potere del califfo divenne solo spirituale.

Il tempo di 'Omar Khayyām



L'algebra di 'Omar Khayyām

'Omar Khayyām visse sotto Malik Shah, terzo sultano selgiuchide, a Estefān, nuova capitale a circa 700 chilometri a est di Baghdad (nell'attuale Iran).






Ricordiamo Khayyām in questa breve storia delle equazioni algebriche, soprattutto per il fatto che egli fu il primo ad affrontare *seriamente* le equazioni cubiche. È questo il contenuto di

Risala fi'l-barahin 'ala masa'il al-gabr wa'l muqabala

ovvero

Trattato sulla dimostrazione di problemi per completamento e riduzione

Ricordiamo infine i suoi contributi importanti in quanto anticipatore di problematiche moderne relative alla filosofia della matematica.

-  C. B. Boyer, Storia della matematica, *ISEDI* (1976)
-  J.H. Conway and R. Guy, The book of numbers, *Springer* (1998)
-  J. Derbyshire, Ignote quantità - Storia reale e immaginaria dell'algebra, *Bollati Boringhieri* (2006)
-  C. S. Roero, L'algebra nella matematica islamica, *Il giardino di Archimede*, unifi.
-  B.L. van der Waerden, A history of algebra: from Al-Khwarizmi to Emmy Noether, *Springer* (1985)