# La Googologia e la logica dei grandi numeri

Giuseppe Metere
Università degli Studi di Palermo

World Logic Day – Palermo

15 gennaio 2024

# GOOGOLOGY

1 *googol* $= 10^{100}$ *cioé* 10 *sediciliardi*

1 *googolplex* $= 10^{googol}$ *cioé* 1 *con* 10 *sediciliardi di zeri*

*Qual è il numero più grande?*

*Sembra una domanda ingenua, perché i numeri sono infiniti...*

**...ma non lo è !**

*Qual è il numero più grande* **dal punto di vista fisico***?*

*Qual è il numero più grande* **che possa essere compreso***?*

*Qual è il numero più grande* **che possa essere descritto***?*

## Si può vivere senza i numeri?

Sì! I pirahã sono una tribù della foresta amazzonica brasiliana composta da circa 800 individui.

La lingua pirahã comprende solo 8 vocali e 3 consonanti e un complesso sistema di accenti. I pirahã non hanno un lessico per i colori, non hanno i verbi al passato, né le subordinate relative.

Il motivo per cui ci interessiamo a loro è che non hanno elaborato un sistema per contare: i pirahã non hanno i numeri! Un pirahã indica con

**hói**: una piccola quantità **hoí**: una grande quantità

Tuttavia i pirahã sono un'eccezione, perché praticamente tutte le popolazioni del mondo hanno adottato sistemi di numerazione.

## In principio vi era... un osso!

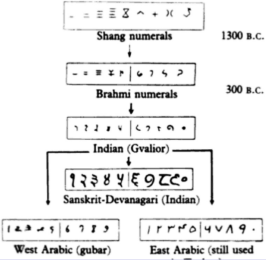
L'**osso di Lebombo**, una tibia di babbuino trovata in Sud Africa, risalente a circa 35.000 anni fa, riporta 29 tacche incise... è il primo computer?

No, probabilmente il primo computer sono state le nostre mani! Non a caso, il più diffuso sistema di numerazione al mondo è ancora oggi quello in base 10:

**una delle tecnologie più sofisticate mai inventate dall'umanità!**

I cosiddetti numeri arabi, che arabi non sono, bensì indiani...

- prima apparizione del sistema posizionale nel manoscritto Bakhshali, 224–383,
- utilizzato da al-Khwārizmī, 813–833,
- importato in occidente da Leonardo Pisano, detto Fibonacci, nel suo testo *Liber Abbaci*, 1202.



## Un mondo di sabbia

Archimede di Siracusa (287–212 a.C.) il più grande matematico dell'antichità. Scrive l'*Arenario*, il primo testo di divulgazione scientifica della storia, dove calcola il numero di granelli di sabbia necessario a riempire l'universo.

- Utilizza il modello eliocentrico di Aristarco per calcolare il diametro della sfera delle stelle fisse in $10^{14}$ stadi, $\sim$2 anni luce (1 stadion = $\sim$185 m).
- Conclude che per riempire una sfera di quelle dimensioni siano necessari non più di $10^{63}$ granelli di sabbia.

Quanti?

1.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000

# I numeri della Grecia Antica

I greci antichi avevano un sistema di numerazione additivo, basato sui multipli delle prime tre potenze di 10. Per questo avevano bisogno di 27 simboli: le 24 lettere dell'alfabeto greco, più 3 lettere arcaiche.

Utilizzando da una a sei cifre, si potevano esprimere i numeri da 1 a 9.999. Ad esempio:

$$ {}^{\iota}\beta\sigma\kappa\beta = 2.222 $$

Il numero $\mathcal{M} = 10.000$ era chiamato *miriade*. Ad esempio:

$$ \gamma\mathcal{M}\,{}^{\iota}\beta\tau\mu\zeta = 32.347 $$

| | | |
|---|---|---|
| 1 = α | 10 = ι | 100 = ρ |
| 2 = β | 20 = κ | 200 = σ |
| 3 = γ | 30 = λ | 300 = τ |
| 4 = δ | 40 = μ | 400 = υ |
| 5 = ε | 50 = ν | 500 = φ |
| 6 = ς (ϝ) | 60 = ξ | 600 = χ |
| 7 = ζ | 70 = ο | 700 = ψ |
| 8 = η | 80 = π | 800 = ω |
| 9 = θ | 90 = ϙ | 900 = ϡ |

**Conclusione**: il sistema di numerazione in uso al tempo di Archimede non è adatto a rappresentare il numero $10^{63}$.

# I numeri di Archimede

Archimede allora inventa un sistema numerico posizionale (senza lo zero) basato sulle miriadi di miriadi: $\mathcal{G} = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} = 10^8 = 100.000.000$.

- i numeri tra 1 e $\mathcal{G}$ sono *numeri del primo ordine*,
- i numeri tra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}^2$ sono *numeri del secondo ordine*,

e così via, fino ai numeri dell'ordine $\mathcal{G}$, ovvero quelli compresi tra $\mathcal{G}^{\mathcal{G}-1}$ e $\mathcal{G}^{\mathcal{G}}$.

$\Rightarrow$ **Per rappresentare $10^{63}$ è sufficiente l'ottavo ordine:** $\mathcal{G}^8 = (10^8)^8 = 10^{64} \Leftarrow$

Ma Archimede non si ferma qui. Definisce il numero $\mathcal{P} = \mathcal{G}^{\mathcal{G}}$, e afferma

- i numeri tra 1 e $\mathcal{P}$ sono *numeri del primo periodo*,
- i numeri tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{G} \cdot \mathcal{P}$ sono *numeri del primo ordine del secondo periodo*.

L'ultimo ordine dell'ultimo periodo è compreso tra $\mathcal{P}^{\mathcal{G}-1} \cdot \mathcal{G}^{\mathcal{G}-1}$ e $\mathcal{P}^{\mathcal{G}}$, e il numero più grande rappresentabile è quindi

$$\mathcal{P}^{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}^{\mathcal{G}})^{\mathcal{G}}$$

Quanto è grande questo numero?

$$\mathcal{P}^{\mathcal{G}} = \underbrace{1.000.000.000.000.000 \cdots\cdots\cdots 000.000.000.000.000.000}_{80.000.000.000.000.000 \text{ di zeri}}$$

## Numeri grandi, molto grandi, enormi

Come abbiamo già osservato, i numeri sono stati inventati per contare...
Facciamo allora un po' di ginnastica con i grandi numeri.

- Gli abitanti del nostro pianeta sono circa 8.000.000.000.
- Le foto caricate su Instagram ne 2019 sono 50.000.000.000.
- Gli alberi sulla terra sono 3.000.000.000.000.
- Le cellule del corpo umano sono circa 100.000.000.000.000, mentre gli atomi che compongono il corpo umano sono circa $10^{28}$, cioè un 1 seguito da 28 zeri!

Che significato hanno questi numeri?

Cosa ci dice il fatto che le stelle nell'universo osservabile siano circa $10^{24}$, quando i batteri che vivono sul nostro pianeta sono più o meno $5 \cdot 10^{30}$ ?
Cosa i rappresenta il numero $10^{63}$ di granelli di sabbia con cui Archimede voleva riempire il cosmo, rispetto al numero di particelle elementari stimate dell'universo conosciuto: $10^{80}$ ? Di quanto si è sbagliato Archimede?

E ora la domanda delle domande.

*A cosa servono numeri più grandi di* $10^{80}$
*il numero di particelle elementari dell'universo?*

## Un mazzo di carte

Con i numeri si contano non solo le cose reali, ma anche quelle *possibili*.

*Ad esempio, quanti possibili mazzi si possono formare con 52 carte?*

In combinatoria, la risposta è data dalle permutazioni di 52 elementi:
$52! = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
È un numero grande, ma non enorme:

80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000

...circa $8{,}0658 \cdot 10^{67}$. Come è possibile immaginare un numero così grande?

Usiamo **il tempo**: quanti anni sono 52! secondi?

**Warm up.** Un milione di secondi sono 11 giorni e mezzo, un miliardo di secondi sono 31 anni e 3/4, 1 bilione (*trillion* in USA) di secondi sono 31.710 anni...

## Via in 52! secondi

Facciamo un gioco: azioniamo un timer, impostiamo il tempo su 52! secondi e vediamo quante cose si possono fare prima che arrivi a 0...


- Scegliamo un punto sull'equatore, e cominciamo a percorrerlo per tutta la sua lunghezza alla velocità di un passo ogni miliardo di anni.
- Dopo aver fatto un giro rimuoviamo una goccia di acqua dall'oceano pacifico, e ricominciamo il giro del mondo, al termine del quale toglieremo un'altra goccia, e così via...
- Proseguiamo in questo modo fino a svuotare completamente l'oceano. A questo punto disponiamo un foglio di carta per terra e riempiamo di nuovo l'oceano per ricominciare da capo.
- Continuiamo a girare, svuotare e impilare finché la pila non ricopra la distanza dalla terra al sole.

Diamo un'occhiata al timer. È diminuito, da $8{,}0658 \cdot 10^{67}$ a $8{,}0630 \cdot 10^{67}$.

- Ricominciamo da tutto capo, e ripetiamo per altre 1.000 volte.

Il timer ora segna $5{,}385 \cdot 10^{67}$. È trascorso $1/3$ del tempo totale!

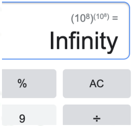
## Comprendere i numeri incomprensibilmente grandi

La metafora temporale ci ha fornito uno strumento per "visualizzare" il numero $8{,}0658 \cdot 10^{67}$, ma non è di grande aiuto per un mostro come $\mathcal{G}^{\mathcal{G}^{\mathcal{G}}}$. Infatti

- $10^{67}$ è un 1 seguito da 67 zeri,
- $\mathcal{P}^{\mathcal{G}}$ è un 1 seguito da 80 biliardi di zeri (80 quadrillions, in USA).

Quanti sono?

Chiediamolo alla calcolatrice di Google
di calcolare la base $\mathcal{P} = \mathcal{G}^{\mathcal{G}}$...




Neanche Google ci aiuta. Proviamo allora a usare un po' di matematica!

**I numeri**: *"una delle tecnologie più sofisticate mai inventate dall'umanità!"*

$\Rightarrow$ **sono un oggetto algebrico** $\Leftarrow$

*(al-ğabr = completamento, composizione)*

## Numeri e operazioni

- **Incremento.**

$$1 + a$$

- **Addizione.**

$$b + a = \underbrace{1 + 1 + \cdots 1}_{b \ \ volte} + a$$

- **Moltiplicazione.**

$$b \cdot a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \ \ volte}$$

- **Potenza.**

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{b \ \ volte} \quad = a \uparrow b$$

- **Tetrazione.**

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow a \uparrow \cdots \uparrow a}_{b \ \ volte} \quad = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$$

**Nota**: *Knuth's up-arrow notation*, convenzione parentesi a destra.

## Capire la tetrazione.

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow 3 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7.625.597.484.987$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3^{3^{3^3}} = 3^{3^{27}} = 3^{7.625.597.484.987}$$
$$= \sim 1,258 \cdot 10^{3.638.334.640.024}$$

$$3 \uparrow\uparrow 5 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3^{3^{3^{3^3}}} = 3^{3^{27}} = \sim 3^{1,258 \cdot 10^{3.638.334.640.024}}$$

## La tentazione della... pentazione!

- **Pentazione.**

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow a}_{b \ \textit{volte}} = ???$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow 3 = 7.625.597.484.987$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow 3 \uparrow 3)$$

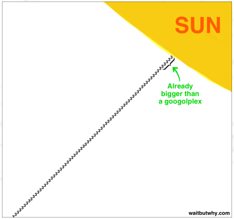
$$= \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \cdots \uparrow 3}_{3\uparrow 3\uparrow 3 \ \textit{volte}} = \underbrace{3^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}_{7.625.597.484.987 \ \textit{volte}}$$

## Semplice, no? ...No! Proviamo con $3\uparrow\uparrow\uparrow 4$

$$
\begin{aligned}
3\uparrow\uparrow\uparrow 4 &= 3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3))\\
&= 3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow(3\uparrow 3\uparrow 3))\\
&= 3\uparrow\uparrow(\underbrace{3\uparrow 3\uparrow\cdots\uparrow 3}_{3\uparrow 3\uparrow 3\ \textit{volte}})\\
&= \underbrace{3\uparrow 3\uparrow 3\uparrow 3\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow 3\uparrow 3\uparrow 3}_{\underbrace{3\uparrow 3\uparrow\cdots\uparrow 3}_{3\uparrow 3\uparrow 3\ \textit{volte}}\ \textit{volte}}
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{3\uparrow 3\uparrow\cdots\uparrow 3}_{3\uparrow 3\uparrow 3\ \text{volte}} = \underbrace{3^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}_{7.625.597.484.987\ \text{volte}} = \mathfrak{Monster}$$

$$3\uparrow\uparrow\uparrow 4 = \underbrace{3^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}_{\mathfrak{Monster}\ \text{volte}}$$



## Lo zoo di Knuth

Possiamo provare a immaginare $3 \uparrow\uparrow\uparrow 5$, o $3 \uparrow\uparrow\uparrow 6$, ma cosa possiamo dire di

$$1.257.394 \uparrow\uparrow\uparrow 2.344.253\ ?$$

Che è certamente un numero molto grande, ma diventa minuscolo se paragonato ai numeri che si possono ottenere con operazioni di ordine superiore:

$$a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow^4 b \qquad a \uparrow^5 b \qquad a \uparrow^6 b \qquad \text{etc.}$$

## Numero di Graham

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \\
&= 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 \\
&= 3 \uparrow\uparrow\uparrow (\mathfrak{Monster}) \\
&= \underbrace{3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow 3}_{\mathfrak{Monster}\ \textit{volte}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
g_2 = 3 \uparrow^{g_1} 3 = 3 \uparrow \cdots \uparrow 3 & & g_1 \ \textit{volte} \\
\vdots \qquad \vdots & & \vdots \\
g_{64} = 3 \uparrow^{g_{63}} 3 = 3 \uparrow \cdots \uparrow 3 & & g_{63} \ \textit{volte}
\end{array}
$$

## Facciamo il punto

*I numeri sono un* **linguaggio***.*

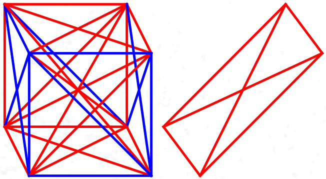
*Questo linguaggio ha delle regole che ne determinano la* **potenza espressiva***.*

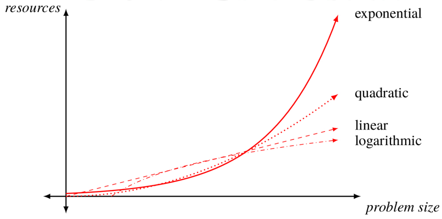
*Se un problema matematico ha come soluzione una grandezza che i* **nostri numeri** *non possono descrivere, dobbiamo utilizzare dei* **numeri più potenti***.*

**Nell'Arenario, per descrivere la soluzione del problema dei granelli di sabbia, Archimede ha dovuto inventare un modo nuovo per rappresentare i numeri.**

## Facciamo il punto

*Ci sono problemi matematici più moderni le cui soluzioni non si possono esprimere utilizzando la normale notazione decimale.*
*(es. teoria di Ramsey)*






*Il sistema decimale è in grado di descrivere fenomeni la cui crescita è* **quadratica**, **cubica**, *al limite* **esponenziale**, *ma non riesce a inseguire* **fenomeni con crescite vertiginosamente superiori**.

Per questo si usa la notazione $\uparrow$ o altre notazioni che crescono ancora più rapidamente .

## Il numero più grande?

Il numero di Rayo è uno dei più grandi numeri mai concepiti.
Non proveremo neanche a descrivere questo numero. Cercheremo invece di capire perché esso è più grande dei numeri che abbiamo descritto fin qui.

**Rayo(n)** *è definito come il più piccolo numero maggiore di qualunque numero descrivibile con una espressione nel linguaggio della teoria degli insiemi (del primo ordine) con n simboli o meno.*

*Il numero di Rayo è definito come*

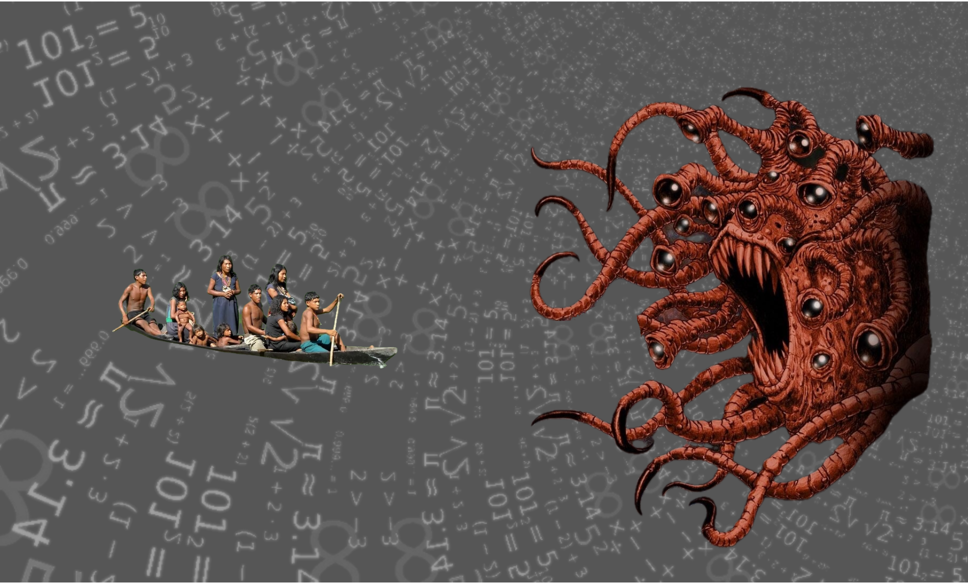
$$Rayo(googol)$$

*dove*

$$googol = 10^{100}$$

$Rayo(n)$ è una funzione non calcolabile perché cresce più velocemente di qualunque funzione calcolabile (come ad es. $a \uparrow \cdots \uparrow b$).

# La fine di questo viaggio



## Credits


- Scott Aaronson, "Who can name the bigger number?", intervento al *Festivaletteratura*, Mantova 9/9/1917.
- Archimede da Siracusa, "Arenario" ($\Psi\alpha\mu\mu\acute{\iota}\tau\eta\varsigma$), *consultato su* https://www.heinrichfleck.net/quaderni/Arenarius.pdf, di H. F. Fleck.
- Markus Deserno, "Nobody comprehends Graham's number", CMU Biophysics Blog, 2021.
- Caleb Everett, Keren Madora, "Quantity recognition among speakers of an anumeric language", Cognitive Science 36, 2012.
- George Gheverghese Joseph, "The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics ", Princeton University Press, 1991.
- Shreyas Kamath, "A Small Problem With Big Numbers", Towards Data Science, 2020.


Ringraziamo Azathoth, Chtulhu, Nyarlathotep e gli altri mostri creati inventati dalla fervida mente di H. P. Lovecraft per la partecipazione!

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!