# Un invito all'algebra categoriale

Giuseppe Metere
Università degli Studi di Palermo

seminario di dipartimento

8 giugno 2022

# *Introduzione*

## ...Ma tu, che lavoro fai?

Una delle domande che ti fanno quando si viene a sapere che sei un matematico o una matematica è:

cosa fa chi **fa ricerca** in matematica?

C'è chi pensa che passiamo le giornate a inventare delle formule nuove, più complicate o più efficienti di quelle del passato, o a risolvere problemi sempre più complessi.

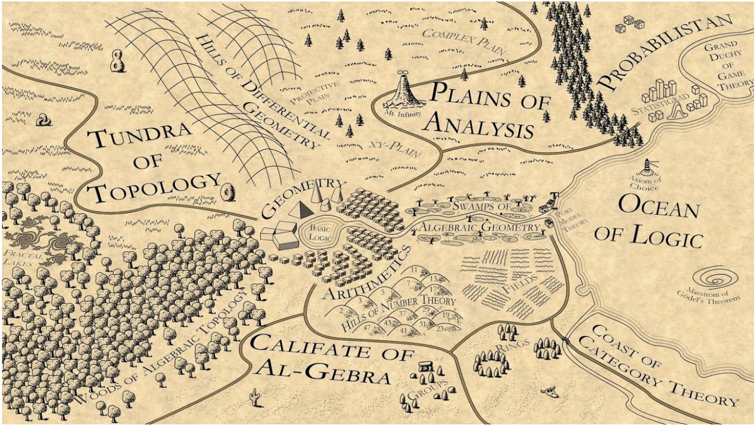
Non è una risposta sbagliata, ma parziale perché lascia intendere che gli enti matematici che studiamo oggi sono i medesimi che venivano studiati dagli antichi egizi, dai sumeri, dai greci classici etc.:

i numeri, le figure geometriche, le grandezze fisiche.

Non è esattamente così: si studiano e si approfondiscono anche oggi molte idee e concetti nati nel passato della storia dei sapiens, ma non solo...

# Mathematistan

I matematici oggi si suddividono in diverse tribù, ognuna con la sua lingua, i suoi riti, i suoi eroi...




picture by Martin Kuppe

Nel Mathematistan si parlano lingue diverse, sicché le conquiste e i progressi di una singola tribù faticano a diffondersi alle altre...

*“ venite igitur descendamus et confundamus ibi linguam eorum*
*ut non audiat unusquisque vocem proximi sui ,,*

[Vulgata Gen. 11,9]

Obiezione: la matematica ha già la sua *lingua franca*: **la Teoria degli Insiemi.**

[Zermelo - Fraenkel, 1922]

*A*1. $\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$. **(estensionalità)**
*A*2. $\forall z (z \notin \emptyset)$. **(vuoto)**
*A*3. $\forall z (z \in \{x, y\} \Leftrightarrow z = x \wedge z = y)$. **(coppia)**
*A*4. $\forall z (z \in \cup x \Leftrightarrow \exists y \in x (z \in y))$. **(unione)**
*A*5. $\forall z (z \in P(x) \Leftrightarrow z \subseteq x)$. **(potenza)**
*A*6. *Per ogni formula* $\phi(z, \ ...)$ *ove non compaia la variabile* $y$,
$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \phi(z, \ ...))$. **(separazione)**
$A7_n$. $\nexists x_1, \dots, x_n (x_1 \in \ x_2 \in \cdots x_n \in x_1)$. **(regolarità)**
*A*8. $\exists x (\emptyset \in x \wedge (\forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)))$. **(infinito)**
*A*9. *Per ogni formula* $\phi(x, y, \ ...)$ *ove non compaia la variabile* $b$,
$\forall x \exists_1 y \phi(x, y, \ ...) \Rightarrow \forall a \exists b \forall y (y \in b \Leftrightarrow \exists x \in a \phi(x, y, \ ...))$. **(rimpiazzamento)**

da [Lolli, Dagli insiemi ai numeri, Bollati Boringhieri, 1994]

# Funzioni

Tuttavia, ZFC ha un formalismo non proprio intuivo (infatti spesso non viene neanche insegnata...) perché risponde a un problema diverso: quello di descrivere le nozioni in modo preciso e privo di ambiguità.

Vediamo un esempio emblematico: **le funzioni**.

Fino al 1700 le funzioni si identificavano con le *formule* che le definivano. Queste (= rappresentazioni analitiche, v. Euler) si costruivano a partire da operazioni algebriche e trascendenti già note, a cui si aggiungevano via via operazioni *nuove*: e.g. serie, prodotti infiniti, serie trigonometriche etc. Così nasce l'idea (o l'esigenza!) di definire le funzioni *arbitrarie*.

Informalmente una funzione è un insieme di coppie ordinate... ma formalmente?

*Def.* **coppia ordinata** $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. [Kuratowski, 1921]
*Def.* **prod. cartesiano** $x \times y := \{z \in P(P(x \cup y)) : \exists u \in x \exists v \in y(z = \langle u, v\rangle)\}$.
*Def.* **relazione** $f$ **da** $x$ **a** $y$ $:= f \subseteq x \times y$.
*Def.* **dominio di** $f$, $dom(f) := \{x \in \cup(\cup f) : \exists y(\langle x, y\rangle \in f\}$.
*...e finalmente $f$ è una* **funzione** *se:*

$$\forall x \in dom(f)\, \forall y, z\, (\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \;\Rightarrow\; y = z).$$

## Teoria delle categorie

Nel Mathematistan c'è bisogno di una lingua comune che serva a far circolare le idee e il pensiero delle sue tribù per

1. far interagire anche matematicamente le diverse matematiche;
2. riconoscere la natura comune di concetti apparentemente diversi.

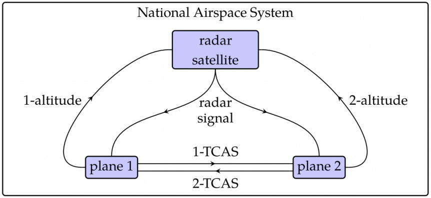
Una possibile risposta a questo bisogno può venire dalla **teoria delle categorie**, dove non solo la nozione di insieme, ma anche quella di funzione diventa una nozione *primitiva*.

> *Category theory takes a* **bird's eye view** *of mathematics. From high in the sky, details become invisible, but we can spot patterns that were impossible to detect from ground level.*
>
> [Leinster, 2014]

Accenniamo qualche esempio per illustrare i due temi richiamati sopra.

## 1. Inter-agire diverse matematiche: National Airspace System

**Problema**: verificare la sicurezza del modello di un sistema complesso.




Interagiscono: gli aeroplani, i loro piloti, i sistemi di bordo (e.g. Traffic Collision Avoidance System), i radar a terra, il GPS.

La proprietà del sistema che deve essere garantita costantemente è la cosiddetta *safe separation*.

Dal punto di vista della matematica, interagiscono: sistemi descritti da equazioni differenziali, sistemi discreti, reti di petri o altri *transition system*, problemi di sincronizzazione o ritardo...

Ognuno di questi ambiti ha la sua matematica, ma in che contesto possono interagire *matematicamente*?

Una possibile risposta è la *temporal type theory*: un approccio topos teoretico al comportamento dei sistemi complessi in [Schultz - Spivak, 2017].

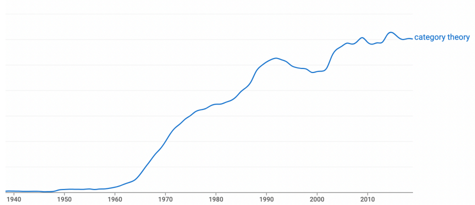
Un *topos* è un *universo in cui fare matematica*: una categoria con delle proprietà, nozione introdotta da Grothendieck e Lawvere.

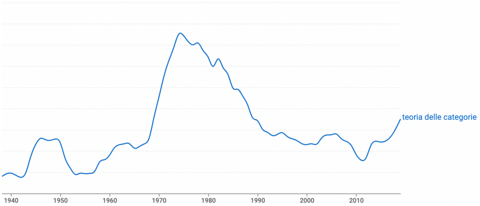
# 2. Quale matematica per la scienza di domani?

*"The majority of current mathematical approaches that have been applied to industries and societies are based solely on 19th-century mathematics.* ***This means that the field of mathematics after the beginning of the 20th century is a broad, undeveloped frontier area, which no one has ever cultivated****."*

*The Coming Era of Mathematical Capitalism - How the Power of Mathematics Changes Our Future*

**[Report from Industry-Academia Round-Table Discussion at the Ministry of Economics Trade and Industry, Japan, 2019]**




[Google Books Ngram Viewer, oggi]

# 2. Riconoscere la natura comune... (i): prodotti e intersezioni

Il prodotto cartesiano di due insiemi, con le sue proiezioni canoniche

$$(A \times B, \pi_1, \pi_2)$$

è caratterizzato dalla proprietà:

$$\forall\ f : X \to A,\ \forall\ g : X \to B$$

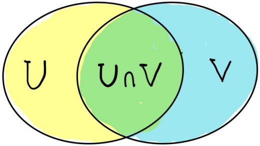
$$\exists!\ h : X \to A \times B \text{ tale che}$$

$$\pi_1 \circ h = f \text{ e } \pi_2 \circ h = g\,.$$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

**spoiler:** h(x)=(f(x),g(x))

L'intersezione di due insiemi il più grande sottoinsieme comune di entrambi:




$$W \subseteq U \text{ e } \ W \subseteq V \Rightarrow W \subseteq U \cap V\,.$$

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "\subset"'] \arrow[d, dashed, "\subseteq"] \arrow[dr, "\subseteq"] & \\
U & U \cap V \arrow[l, "\subseteq"] \arrow[r, "\subseteq"'] & V
\end{tikzcd}$$

## 2. Riconoscere la natura comune... (ii): funzioni iniettive e suriettive

**Def**. *$f\colon X \to Y$* **iniettiva** *se $\forall x, x' \in X\, (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$.*

**Def**. *$f\colon X \to Y$* **suriettiva** *se $\forall y \in Y\, \exists x \in X\, (y = f(x))$.*

Sono nozioni chiaramente diverse... o no?

Mi serve un po' di notazione:

$$hom(X, Y) := \{\text{ funzioni } f\colon X \to Y\}\,.$$

Per ogni insieme $Z$, la funzione $f\colon X \to Y$ definisce *due nuove funzioni*:

$$hom(f, Z)\colon hom(Y, Z) \to hom(X, Z) \qquad g \mapsto g \circ f$$

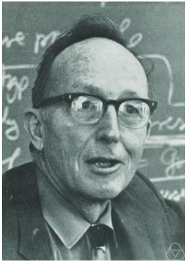
$$hom(Z, f)\colon hom(Z, X) \to hom(Z, Y) \qquad g' \mapsto f \circ g'$$

**Teorema**. *(i) $f$ iniettiva sse $hom(Z, f)$ iniettiva;*
*(ii) $f$ suriettiva sse $hom(f, Z)$ iniettiva.*

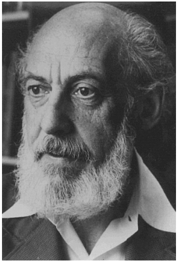
# *Teoria delle Categorie*

## Le origini

La teoria delle categorie nasce nel 1945 dal lavoro di Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane sul rapporto tra spazi e loro invarianti omotopici e omologici. [Eilenberg - MacLane, *General theory of natural equivalences*, 1945]

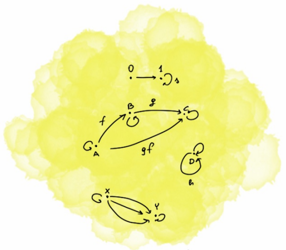


Sebbene si sia originata in un ambito così specifico, la teoria ha un carattere generale che negli anni successivi ha prodotto notevoli cambiamenti non solo nella **topologia algebrica**, ma anche in altre discipline, come ad esempio in **geometria algebrica**, **logica matematica**, **combinatoria**, **teoria dei fondamenti**, **informatica**.



## La teoria

Un'idea chiave dell'approccio categoriale è che sia possibile studiare le proprietà di un oggetto matematico osservando il suo rapporto con altri oggetti attorno a lui.




Una categoria $\mathcal{A}$ è costituita da due entità: **oggetti** e **morfismi**.

I morfismi si possono comporre, e le regole di questa composizione formano la **struttura** di una categoria.

Indichiamo l'insieme dei morfismi tra due oggetti $A$ e $B$ con $hom_{\mathcal{A}}(A, B)$.

Di solito, gli oggetti sono entità matematiche (gruppi, spazi, sistemi...).
Li disegnamo con dei punti $\bullet$ sicché nessuno possa studiarne le proprietà guardando cosa c'è al loro interno.
I morfismi (o frecce) connettono i punti $\bullet \longrightarrow \bullet$, se questi condividono una certa $\mu o \rho \varphi \acute{\eta}$. Se gli oggetti sono entità algebriche, essi ne preservano la struttura, se sono entità geometriche, qualche loro proprietà geometrica, se sono sistemi, potranno descriverne l'evoluzione...

## Un'algebra delle funzioni

Riassumendo, una categoria $\mathcal{A}$ è costituita da:

(i) una classe di oggetti $\mathcal{A}_0 = \{A, B, C, \ldots\}$ e una di morfismi $\mathcal{A}_1 = \{f, g, h, \ldots\}$

(ii) due assegnamenti $dom, cod \colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_0$, e un'assegnamento $id \colon \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1$

(iii) una *legge di composizione parziale*: dati $f$ e $g$ con $cod(f) = dom(g)$, è definita la composizione $g \circ f$.

(iv) la legge di composizione ha delle *identità* $id$, una per ogni oggetto.

Questi dati devono soddisfare gli assiomi:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \qquad f \circ id = f = id \circ f$$

Da un certo punto di vista, una categoria può essere vista come una formalizzazione della nozione di composizione delle funzioni: è la categoria $\mathcal{S}et$ degli insiemi e delle applicazioni tra essi.

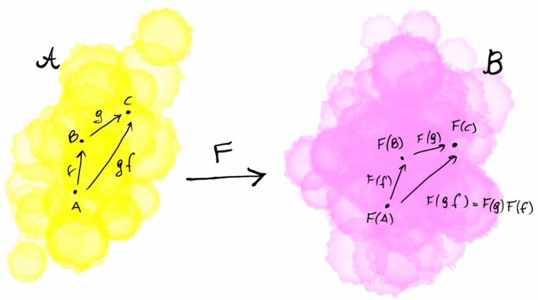
La CT però è ben più **espressiva** di una semplice teoria algebrica.

## Funtori

Per ora, abbiamo descritto solo una categoria: $\mathcal{S}et$, la categoria degli insiemi e delle funzioni. Analogamente si definiscono molte altre categorie, come ad es. $\mathcal{A}b$, $k\mathcal{V}ect$, $k\mathcal{V}ar$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{M}et$, $\mathcal{A}ff$...

Per fare interagire tra loro categorie diverse definiamo **i funtori**.

Date le categorie $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, un funtore $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ è una legge tra oggetti e morfismi delle due categorie che ne preserva la struttura.

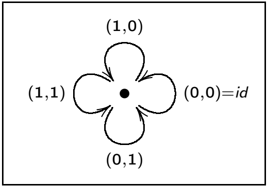


## Esempi di funtori

- dimenticanti, e.g. $U\colon k\mathcal{A}lg \to k\mathcal{V}ect$
- liberi, e.g. $U\colon \mathcal{S}et \to \mathcal{M}on$
- rappresentabili, e.g. $hom(Z,-)\colon \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$
- diagrammi, e.g. Span: $\boxed{\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet} \to \mathcal{C}$
- gruppi di omotopia: $\pi_n\colon \mathcal{T}op_* \to \mathcal{G}rp$
- (co)omologici: e.g. $H^n(-,G)\colon G\mathcal{M}od \to \mathcal{A}b$

Se $\mathcal{G}$ è un gruppo, visto come una categoria con un solo oggetto, e.g.:

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 =$$




- un funtore $\mathcal{G} \to \mathcal{S}et$ è una azione di $\mathcal{G}$ su un insieme
- un funtore $\mathcal{G} \to \mathbb{C}\mathcal{V}ect$ è una rappresentazione complessa di $\mathcal{G}$

# *Algebra Categoriale*

## Semantica Funtoriale

Nella sua tesi di dottorato del 1963 *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, William F. Lawvere propone di considerare un funtore

$$\mathcal{T} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$$

come un'interpretazione della categoria $\mathcal{T}$ all'interno della categoria $\mathcal{C}$.

*Nello specifico, $\mathcal{T}$ è la teoria algebrica, la sintassi, e $F$ realizza all'interno di $\mathcal{C}$ le entità algebriche la cui descrizione è codificata in $\mathcal{T}$, i.e. la semantica della teoria algebrica $\mathcal{T}$.*

**Quantum leap:** tutti i funtori possono essere visti in questo modo!

## Strutture interne

Il linguaggio dei diagrammi ci permette di descrivere graficamente gli enti matematici, con gli assiomi che li definiscono. E.g. $(M, \star, e)$ è un monoide se:

$$\begin{tikzcd} M \times M \times M \arrow[r, "\star \times id"] \arrow[d, "id \times \star"'] & M \times M \arrow[d, "\star"] \\ M \times M \arrow[r, "\star"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\langle id, e \rangle"] \arrow[dr, "id"'] & M \times M \arrow[d, "\star"] & M \arrow[l, "\langle e, id \rangle"'] \arrow[dl, "id"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

La categoria $\mathcal{M}$ opportunamente generata dai questi diagrammi è la teoria algebrica dei monoidi: un monoide è un funtore p.p. $M\colon \mathcal{M} \to \mathcal{S}et$ .
La categoria dei monoidi si ottiene come la categoria dei funtori da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{S}et$.
Analogamente, posso descrivere un gruppo, un anello, uno spazio topologico...

Nulla ci impedisce di utilizzare gli stessi diagrammi per definire strutture interne a altre categorie. Ad esempio, se $\mathcal{G}rp = \mathcal{G}rp(\mathcal{S}et) =$ gruppi, si ha che

$$\mathcal{G}rp(\mathcal{G}rp) = \text{gruppi abeliani}$$
$$\mathcal{G}rp(\mathcal{T}op) = \text{gruppi topologici}$$
$$\mathcal{G}rp(\mathcal{S}mth\mathcal{M}fd) = \text{gruppi di Lie}$$
$$\mathcal{G}rp(\mathcal{V}ar) = \text{gruppi algebrici}$$

## Categorie interne

Una delle strutture che è possibile considerare internamente è proprio quella di categoria. Se

- una categoria (piccola) è formata da un insieme di oggetti, un insieme di morfismi e delle funzioni che assegnano dominio, codominio, identità e composizione,
- una categoria interna a $\mathcal{G}rp$ è formata da un gruppo di oggetti, un gruppo di morfismi e degli omomorfismi di gruppo che assegnano dominio, codominio, identità e composizione.

La nozione di **categoria interna** può sembrare una bizzarra costruzione teorica che interessi solo pochi appassionati, ma in realtà è presente in molti contesti matematici, anche a livello elementare.

**Esempio.** In algebra, lo studio delle **congruenze** è un tema fondamentale.

- Una congruenza (rel. di eq. interna) non è altro che una particolare categoria interna.
- vedere le congruenze come categorie interne è il punto di vista della cosiddetta **higher dimensional algebra** (HDA).

## La mia ricerca

Uno degli obiettivi di un Seminario di Dipartimento è la condivisione con tutta la comunità dei propri interessi di ricerca.

Fin qui, ho raccontato più che altro alcune delle mie motivazioni, ma non sono entrato nel merito. Lo faccio ora:

- Mi occupo di **algebra categoriale**, ossia del contributo che può dare la teoria delle categorie allo studio dell'algebra classica.
- In particolare, mi interessa la possibilità di inquadrare le proprietà algebriche in un contesto di **dimensione superiore**.
- Più in particolare, utilizzando questo punto di vista, studio come le **teorie coomologiche** classiche si possano estendere naturalmente categorie di strutture algebriche **non abeliane**.
- Il **risultato** è la possibilità di poter dimostrare dei teoremi in un contesto abbastanza generale da poter essere applicati, ad esempio, a gruppi, anelli, algebre di Lie, di Leibniz, di Heyting, algebre di Hopf cocommutative etc.

Vorrei spiegare cosa intendo per **contesto di dimensione superiore**.

# *Higher dimensional algebra*

## Higher dimensions

Il concetto di **dimensione** è un concetto geometrico, ma qui la nozione geometrica ci servirà solo per analogia...

> *Il matematico Lucio Lombardo Radice (docente UniPa 1956-1960) parlava di* **tre livelli di astrazione***: il primo livello quello dei numeri, il secondo dell'algebra astratta, il terzo della teoria delle categorie.*
>
> *liberamente tratto da* [Lombardo Radice, *L'algebra astratta*, 1972]

Rivisitiamo questa idea in un contesto contemporaneo.
**Dimensione 0.** A livello insiemistico, l'insieme $\{0,1\}$ dei valori di verità ha un ruolo speciale: ci serve a definire i valori di verità. Ad esempio, se $S$ è un insieme non strutturato, e $x, y \in S$, si hanno solo due possibilità: o $x = y$, o $x \neq y$, i.e. $hom(x,y) \in \{0,1\}$.
**Dimensione 1.** A livello categoriale, l'insieme $\{0,1\}$ viene sostituito dalla categoria $\mathcal{S}et$. Se $\mathcal{C}$ è una categoria, e $x, y \in \mathcal{C}$ sono oggetti, c'è un insieme di morfismi che permettono di confrontare $x$ con $y$, i.e. $hom(x,y) \in \mathcal{S}et$.
**Dimensione 2.** Per $n = 2$ c'è la nozione di 2-categoria, e il ruolo che era di $\{0,1\}$, e poi di $\mathcal{S}et$, è ora della categoria delle categorie i.e. $hom(x,y) \in \mathcal{C}at$.
**Dimensione $n$.** Esercizio ;)

## Case study: la nozione di suriettività

In $\mathcal{S}et$, consideriamo due caratterizzazioni, per $f : X \to Y$ suriettiva.

Per ogni insieme $Z$, la funzione

$$hom(Y, Z) \to hom(X, Z)$$

data da $g \mapsto g \circ f$ è iniettiva.
Cioè, date $g_1, g_2 \in hom(Y, Z)$, si ha

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2,$$

ovvero, $f$ è **cancellabile a destra**.

In una categoria qualunque, una freccia cancellabile a destra è detta **epi**.

La funzione $f$ è la **proiezione sul quoziente** della relazione di equivalenza $R$ su $X$:

$$x_1, x_2 \in X, \qquad x_1 R x_2 \text{ sse } f(x_1) = f(x_2)$$

Cioè, l'insieme degli insiemi $f^{-1}(y)$ controimmagine degli elementi $y \in Y$ forma una partizione di $X$.

In una categoria qualunque, una freccia quoziente di una relazione di equivalenza è detta **epi regolare**.

*Epi e epi regolari coincidono in $\mathcal{S}et$, ma non coincidono in generale. Ad esempio l'omomorfismo di anelli unitari $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ è un epi, ma non è regolare, mentre l'omomorfismo di anelli unitari $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ è un epi regolare.*

## Congruenze

Una relazione di equivalenza interna a una varietà algebrica[1] viene chiamata **congruenza**. Lo studio delle proprietà del reticolo delle congruenze di una varietà è un tema classico dell'algebra, perché permette di studiare i quozienti.

**Fatto:** *ogni congruenza può essere descritta come una baby-categoria:*

- *La relazione $R \subseteq X \times X$ viene identificata con un insieme di frecce, e l'isieme $X$ con un insieme di oggetti;*
- *Diciamo che c'è una freccia $x \to y$ sse $xRy$.*

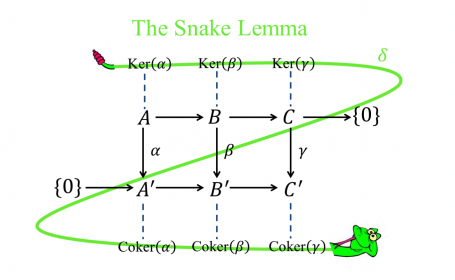
Qual è il vantaggio nel vedere le congruenze come categorie interne?
E' un salto dimensionale: si può adottare il punto di vista e applicare delle tecniche specifiche della **2-categoria delle categorie interne a una varietà**.

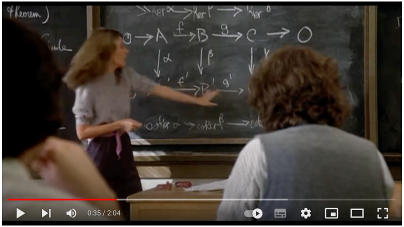
Sembra il gioco delle tre carte... ma non è così.

Proverò a illustrare questo punto di vista con un esempio semplice, ma spero non banale, ispirato anche al mio lavoro.

[1] nel senso dell'algebra universale.

## Snake lemma *Le diagramme du serpent*, I.1.4 Prop. 2 in [Bourbaki, Alg. comm, 1961]

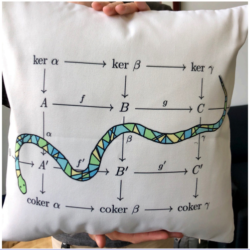


*It's my turn* (Amarti a New York), 1980.

Il lemma è un classico che si insegna nei corsi di base di algebra commutativa.

- Vale in $\mathcal{A}b$ e in tutte le categorie abeliane.
- Con ipotesi aggiuntive vale anche in molte categorie non abeliane, *e.g.* gruppi.



## Categorie in $\mathcal{A}b$

**Fatto.** *Una categoria interna ad $\mathcal{A}b$ può essere completamente descritta da un'omomorfismo di gruppi abeliani.*

Anche se questo fatto può sembrare bizzarro o anti-intuitivo, ricordiamo che nella pratica algebrica quotidiana è consuetudine trattare le congruenze mediante sottogruppi, mediante ideali etc.

$$\text{congruenze : monomomorfismi} \;=\; \text{categorie interne : morfismi}$$

Sia $B \leq C$ in $\mathcal{A}b$. $B$ definisce una congruenza in $C$: dati $x, y \in C$,

$$\begin{aligned} x \sim y \quad & \textit{sse} \quad y - x \in B \\ & \textit{sse} \quad y = x + b, \;\; b \in B \end{aligned}$$

Interpretiamo $(x, b)$ come una freccia:

$$x \xrightarrow{(x,b)} y$$

che *testimonia* che $x \sim y$.

Sia $f : B \to C$ in $\mathcal{A}b$. $f$ definisce una categoria in $C$: dati $x, y \in C$, $(x, b)$ è una freccia $x \to y$ sse:

$$y = x + f(b)$$

Legge di composizione:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "{(x,b)}"'] \arrow[rr, bend left, "{(x,b+b')}"] & y \arrow[r, "{(y,b')}"'] & z \end{tikzcd}$$

## Snake lemma rivisitato

Interpretiamo lo Snake Lemma contestualizzandolo in dimensione due.

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Ker}(\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Ker}(\gamma) \arrow[d] \\
A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] \\
A' \arrow[r, "k'"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
\mathsf{Cok}(\alpha) \arrow[r] & \mathsf{Cok}(\alpha) \arrow[r] & \mathsf{Cok}(\alpha)
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{A}) \arrow[r] \arrow[d, dash, dotted] & \pi_1(\mathbb{B}) \arrow[r] \arrow[d, dash, dotted] & \pi_1(\mathbb{C}) \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathbb{A} \arrow[r, "K"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathbb{B} \arrow[r, "F"] \arrow[d, dash, dotted] & \mathbb{C} \arrow[d, dash, dotted] \\
\pi_0(\mathbb{A}) \arrow[r] & \pi_0(\mathbb{B}) \arrow[r] & \pi_0(\mathbb{C})
\end{tikzcd}
$$

## Snail lemma

Vedere lo Snake Lemma in un dim 2 non è solo un modo per tradurre un teorema già noto in un linguaggio diverso... Usando nozioni in dim 2 otteniamo **risultati genuinamente nuovi**. Ad esempio, se al posto del nucleo *classico*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & \mathbb{A} \arrow[u, phantom, "="] \arrow[r, "F"'] & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

utilizziamo il nucleo *omotopico*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & \mathbb{A} \arrow[u, phantom, "\cong"] \arrow[r, "F"'] & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

**Snail Lemma 3.1** *Consider the following commutative diagram in* $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\gamma) \arrow[r, "\mathrm{K(id)}"] \arrow[d, "k_\gamma"'] & \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r, "\mathrm{K}(f)"] \arrow[d, "k_\alpha"'] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[d, "k_\beta"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A_0 \times_{f_0,\beta} B \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[d, "c_\gamma"'] & A_0 \arrow[r, "f_0"'] \arrow[d, "c_\alpha"'] & B_0 \arrow[d, "c_\beta"] \\ \mathrm{Cok}(\gamma) \arrow[r, "\mathrm{C}(\beta')"'] & \mathrm{Cok}(\alpha) \arrow[r, "\mathrm{C}(f_0)"'] & \mathrm{Cok}(\beta) \end{tikzcd}$$

*If* $\alpha, \beta$ *and* $\gamma$ *are proper, then the following sequence is exact*

$$\mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\mathrm{K(id)}} \mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{\mathrm{K}(f)} \mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{k_{\beta'} \cdot c_\gamma} \mathrm{Cok}(\gamma) \xrightarrow{\mathrm{C}(\beta')} \mathrm{Cok}(\alpha) \xrightarrow{\mathrm{C}(f_0)} \mathrm{Cok}(\beta)$$

E.M. Vitale, *The snail lemma*, TAC 2016.

## Per chi vuole approfondire lo Snail Lemma

Dello Snail Lemma parliamo nei seguenti lavori:

- P.-A. Jacqmin, S. Mantovani, G. M., E.M. Vitale, **On fibrations between internal groupoids and their normalizations**, Applied Categorical Structures 26, (2018).
- P.-A. Jacqmin, S. Mantovani, G. M., E.M. Vitale, **Bipullbacks of fractions and the snail lemma**, Journal of Pure and Applied Algebra, 223 no. 12 (2019).
- S. Mantovani, G. M., E.M. Vitale, **The snail lemma for internal groupoids**, Journal of Algebra, 535 (2019).

Da quel filone è nata una rivisitazione della teoria dell'ostruzione di Schreier-MacLane:

- A.S. Cigoli, G. Metere, **Extension theory and the calculus of butterflies**, Journal of Algebra 458 (2016).
- A.S. Cigoli, S. Mantovani, G. Metere, E. M. Vitale, **Fibred aspects of Yoneda's regular span**, Advances in Mathematics, 360 (2020).
- A.S. Cigoli, S. Mantovani, G. Metere, E.M. Vitale, **Fibred-categorical obstruction theory**, Journal of Algebra 593 (2022).

## Qualche riferimento bibliografico generale

**Testi introduttivi:**

- T. Leinster, Basic Category theory. Cambridge University Press, 2014.
- F.W. Lawvere, S.H. Schanuel, Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories. Cambridge University Press, 1991.

**Manuali:**

- E. Riehl, Category Theory in Contexts. Dover Publications, 2016.
- S. MacLane, Categories for the Working Mathematician. G.T.M. Springer, 1971.
- F. Borceux, Handbook of Categorical Algebra (3 volumi). Encyclopedia of Mathematics and its Applications 50, Cambridge University Press, 1994.
- F. Borceux, D. Bourn, Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories, Mathematics and Its Applications 566, Kluwer 2004

**Online:**

- `ncatlab.org`. Wiki collaborativo su matematica, fisica e filosofia, dal punto di vista HDA, CT, HoT, TT (oltre 16.000 pagine).
- Videocorso di Teoria delle Categorie (YouTube, approx. 30 ore, in italiano). Prodotto da ***ItaCa, network internazionale teorici delle categorie italiani***. Info: `https://progetto-itaca.github.io/`.